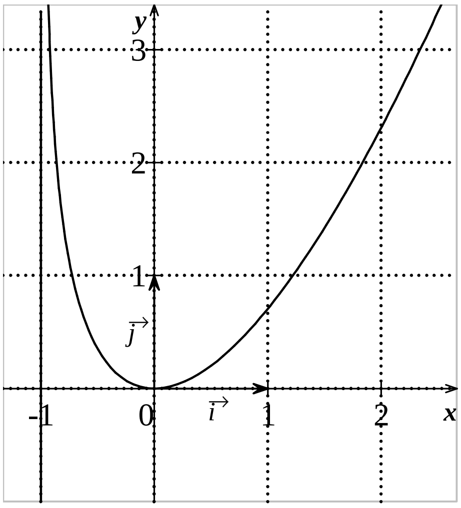
http://ymaths.e-monsite.com/

Exercice n°1 :

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$



A/ 1/ Soit g la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{2}{15}(3x^2+x-2)\sqrt{1+x}$

Montrer que g est dérivable sur $[-1,+\infty[$ et que $g'(x)=x\sqrt{1+x}$

2/ Soit $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

a/ Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $I=\left[2x^2\sqrt{1+x}\right]_0^1-4\int_0^1 g'(x)\,dx$

b/ En déduire la valeur de I et interpréter graphiquement le résultat.

B/ Soit h la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par $h(x)=\int_0^{\cos x} f(t)\,dt$

1/ Montrer que h est dérivable sur $]-\pi,\pi[$.

2/ Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\,]-\pi,\pi[$.

3/ Donner le sens de variations de h.

http://ymaths.e-monsite.com/

Exercice n°2 :

Soit $f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

1/ Justifier que f est définie et croissante sur IR.

2/ Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que C passe par O et donner l'équation de la tangente T à C en O.

3/ Pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $g(x)=f(\tan x)=\int_0^{\tan x}\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$

Montrer que g est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $g'(x)$.

En déduire une expression simple de $g(x)$ en fonction de x.

4/ Déterminer $f(1)$ et $f(\sqrt{3})$.

5/ Pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, on pose $h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\int_0^x\dfrac{dt}{1+t^2}+\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{dt}{1+t^2}$

Montrer que h est constante et déterminer cette constante.

6/ Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

7/ Montrer que f est impaire et tracer la courbe C.

http://ymaths.e-monsite.com/