

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (1 - \ln x)^2$

<http://ymaths.e-monsite.com/>

1/ Etudier les variations de la fonction f .

2/ a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$.

Montrer que g réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$

b. Montrer que pour tout x de $[0, +\infty[$, $g^{-1}(x) = e^{1+\sqrt{x}}$

3/ Tracer la courbe (C) de f et la courbe (C') de g^{-1} dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e (1 - \ln t)^n dt$

a/ Calculer I_1 .

b/ En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$

c/ On désigne par A et B les points de (C) d'abscisses respectifs 1 et e .

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB}$ de la courbe (C) autour de l'axe $(O, \vec{i})$. Calculer V .

Exercice n°2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ 1/ Dresser le tableau de variation de f .

<http://ymaths.e-monsite.com/>

2/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α . Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

3/ Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

4/ Tracer $\mathcal{C}$ et Δ .

5/ a/ A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x e^{-x} dx$.

b/ Soit D la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution obtenu par rotation de la partie D autour de l'axe des abscisses.

B/ Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$

1/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$

2/ Montrer que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

3/ a/ Montrer que $g'(x) = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

b/ Dresser le tableau de variations de g sur $[0, \alpha]$.

C/ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$

1/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$.

2/ Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

3/ En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.