Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\ln x} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

On désigne par C la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

2/ Montrer que f est continue en 0.

3/ Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

4/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

5/ Montrer que f est dérivable sur $D_f \setminus \{0\}$ et que $f'(x)=\dfrac{x(-1+2\ln x)}{(\ln x)^2}$ pour tout $x\in\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

6/ Etudier les branches infinies de C.

7/ Tracer la courbe C de f. On prend $\sqrt{e}\approx 1,6$

Exercice n°2 :

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=1-\ln(1+e^{-x})$

On désigne par C la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b/ Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2/ a/ Montrer que pour tout réel x on a $f(x)=x+1-\ln(1+e^{x})$

b/ Déduire que la droite D d'équation $y=x+1$ est une asymptote à C au voisinage de $-\infty$.

c/ Etudier la position relative de D et C.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$ pour tout $x\in IR$.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α tel que $\alpha=-\ln(e-1)$.

5/ Tracer la courbe C de f. $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2\text{ cm}\right)$

II/ 1/ Montrer que : $f(x)\geq x \Leftrightarrow x\leq -\alpha$

2/ On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in IN$.

a/ Montrer que pour tout $n\in IN$, $0\leq u_n\leq -\alpha$.

b/ Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c/ En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n°3 :

A/ Le tableau ci-contre est celui d'une fonction g définie sur $]0,+\infty[$

par $g(x)=1+\frac{a}{x}+b\frac{\ln x}{x}$ avec a et b des réels.

x	0		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1-e^{-2}$	↗	1

1/ Montrer que : $a=1$ et $b=-1$

2/ Donner le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

B/ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases} x e^{\frac{\ln x}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Montrer que f est dérivable à droite en 0.

2/ a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

3/ a/ Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$: $f'(x)=g(x)e^{\frac{\ln x}{x}}$

b/ Dresser le tableau de variations de f.

4/ a/ Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite D d'équation $y=x$.

b/ Tracer la courbe (C) de f.

5/ Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $h(x)=\ln x-x^2$

a/ Montrer que h est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et en déduire que $h(x)\leq 0$ sur $[1,+\infty[$.

b/ En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$: $\frac{\ln x}{x}\leq x$

6/ Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=2$.

a/ A l'aide d'une intégration par parties calculer $\int_1^2 x e^x\,dx$.

b/ Montrer que $0\leq\mathcal{A}\leq e^2$