## Exercice n°1:

Soit la fonction f définie par 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
http://ymaths.e-monsite.com/

On désigne par C la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

- $1/\,\mathrm{D\acute{e}terminer}$  l'ensemble de définition  $\mathrm{D_f}\,$  de f.
- 2/ Montrer que f est continue en 0.
- 3/ Calculer les limites de f aux bornes de  $D_f$ .
- 4/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
- 5/ Montrer que f est dérivable sur  $D_f \setminus \{0\}$  et que  $f'(x) = \frac{x(-1+2\ln x)}{(\ln x)^2}$  pour tout

 $x \in \left]0, 1\right[ \cup \left]1, +\infty\right[$  . Dresser le tableau de variation de f.

- 6/ Etudier les branches infinies de C.
- 7/ Tracer la courbe C de f. On prend  $\sqrt{e} \approx 1.6$

http://ymaths.e-monsite.com/

## Exercice n°2:

Soit la fonction f définie sur IR par f  $(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$ 

On désigne par C la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1/ a/ Calculer  $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
  - b/ Montrer que  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- 2/ a/ Montrer que pour tout réel x on a f (x) =  $x + 1 \ln(1 + e^x)$ 
  - b/ Déduire que la droite D d'équation y = x + 1 est une asymptote à C au voisinage de  $-\infty$ .
  - c/ Etudier la position relative de D et C.
- 3/ a/ Montrer que f est dérivable sur IR et que f'(x) =  $\frac{1}{1+e^x}$  pour tout x \in IR.
  - b/ Dresser le tableau de variation de f.
- 4/ Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $\alpha = -\ln(e-1)$ .
- 5/ Tracer la courbe C de f.  $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm})$
- II/ 1/ Montrer que :  $f(x) \ge x \iff x \le -\alpha$ 
  - $2/\ On\ considère\ la\ suite\ \left(u_{_{n}}\right)\ définie\ sur\ IN\ par\ u_{_{0}}=\frac{1}{2}\ et\ u_{_{n+1}}=f\left(u_{_{n}}\right)\ pour\ tout\ n\in\ IN\ .$ 
    - a/ Montrer que pour tout  $n \in IN$  ,  $0 \le u_{_n} \le -\alpha$  .

http://ymaths.e-monsite.com/

- b/ Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- c/ En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente puis déterminer  $\lim_{n\to\infty} u_n$ .

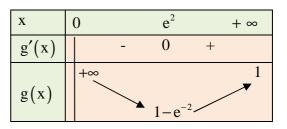
## Exercice n°3:

A/ Le tableau ci-contre est celui d'une fonction g définie sur  $]0,+\infty[$ 

par 
$$g(x) = 1 + \frac{a}{x} + b \frac{\ln x}{x}$$
 avec a et b des réels.

- 1/Montrer que : a = 1 et b = -1
- 2/ Donner le signe de g(x) sur  $]0,+\infty[$ .
- B/ Soit f la fonction définie sur  $[0, +\infty]$  par

$$f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{\ln x}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



http://ymaths.e-monsite.com/

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ).

- 1/ Montrer que f est dérivable à droite en 0.
- $2/ a/ Calculer \lim_{x \to +\infty} f(x)$ 
  - b/ Montrer que  $\lim_{x \to +\infty} [f(x) x] = +\infty$  et interpréter graphiquement le résultat.
- 3/ a/ Montrer que pour tout  $x \in \left]0, +\infty\right[ : f'(x) = g(x)e^{\frac{\ln x}{x}}$ 
  - b/ Dresser le tableau de variations de f.
- 4/a Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite D d'équation y = x.
  - b/ Tracer la courbe (C) de f.

http://ymaths.e-monsite.com/

- 5/ Soit h la fonction définie sur  $[1,+\infty[$  par  $h(x) = \ln x x^2$ 
  - a/ Montrer que h est strictement décroissante sur  $[1,+\infty[$  et en déduire que h $(x) \le 0$  sur  $[1,+\infty[$  .
  - b/ En déduire que pour tout  $x \in [1, +\infty[$  :  $\frac{\ln x}{x} \le x$
- 6/ Soit  $\mathcal A$  l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et x=2.
  - a/ A l'aide d'une intégration par parties calculer  $\int_1^2 x \, e^x \, dx$  .
  - b/ Montrer que  $0 \le A \le e^2$

http://ymaths.e-monsite.com/