Mr Rekik Sabeur **$3^{ème}$ Math**

Série Trigonométrie

Exercice n°1 :

Montrer que :

a. $\cos(\frac{3\pi}{2}+x)\sin(\pi+x)-\sin(\frac{5\pi}{2}-x)\sin(\frac{3\pi}{2}+x)=\cos 2x$

b. $\sin^2 x-2(1+\cos x)=-4\cos^4(\frac{x}{2})$

c. $2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})-\cos 2x=1+\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

Exercice n°2 :

$(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé direct du plan.

$\vec{u}$ est le vecteur tel que $\|\vec{u}\|=4$ et $(\widehat{\vec{j},\vec{u}})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$.

Exercice n°3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soient $A(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$ et $B(-2,2\sqrt{3})$

1. Montrer que le triangle OAB set rectangle en O.
2. a. Déterminer les coordonnées polaires de A et B.
   b. Retrouver le résultat de la première question.

Exercice n°4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

Soit A le point de coordonnées polaires $A(4,\frac{\pi}{3})$

On désigne par OABC le carré tel que : $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées polaires de B et C.
3. a).Déterminer les coordonnées cartésiennes de A et C.
   b. En déduire les coordonnées cartésiennes de B.
   c. En utilisant les coordonnées de B, montrer que :
   $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Exercice n°5 :

1. Montrer que pour tout réel x :
   $\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$
2. En déduire que : $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

Exercice n°6 :

Soit $f(x)=\frac{1+2\cos 2x+\cos 4x}{1-2\cos 2x+\cos 4x}$

1. Montrer que pour tout réel x :
   $1-2\cos 2x+\cos 4x=2\cos 2x(\cos 2x-1)$
2. En déduire que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=\frac{-1}{\tan^2 x}$
3. Montrer alors que : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

Exercice n°7 :

Soient x et y deux réels de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$\cos x=\frac{3}{5}$ et $\cos y=\frac{4}{5}$. Montrer que $x+y=\frac{\pi}{2}$

Exercice n°8 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0,2\pi]$ les équations et représenter les images des solutions :
   a. $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})-1=0$ b. $\cos(x+\frac{\pi}{3})-\cos(x-\frac{\pi}{3})=0$
   c. $\cos(2x-\frac{\pi}{4})+\sin(2x-\frac{\pi}{4})=0$
2. Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les équations :
   a. $2\cos^2 x-1=0$ b. $2\cos^2 x-\cos x=0$
   c. $\sin 2x\sin x-\cos 2x\cos x=\frac{1}{2}$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
   a. $2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ b. $\cos 2x+\sqrt{3}\cos x-2=0$
   c. $\cos 2x=5-\cos^2 x$
4. Résoudre dans $[0,2\pi]$ les équations :
   a. $\sqrt{3}\tan(x+\frac{\pi}{3})-1=0$
   b. $\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+\sqrt{3}=0$
   c. $\tan(x-\frac{\pi}{6})+\tan(\frac{\pi}{3}-x)=0$

Exercice n°9 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto\frac{\sqrt{2}(\cos x+\sin x)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x)=0$
3. a. Montrer que : $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
   b. Simplifier alors $f(x)$
   c. Résoudre dans $[0,2\pi]$: $f(x)\geq\sqrt{2}$

Exercice n°10 :

1. Résoudre dans $[0,\pi]$: $\cos 4x-3\cos 2x+2=0$
2. Soit $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto\frac{\cos 4x-3\cos 2x+2}{2\cos 2x-1}$
   a. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   b. Montrer que pour tout $x\in D_f : f(x)=\cos 2x-1$
   c. Résoudre dans $[0,\pi]$: $f(x)-\sin 2x=-1$
   d. Résoudre dans $[0,\pi]$: $f(x)\leq-\frac{1}{2}$

Exercice n°11 :

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto 1+\cos 2x-\sin 2x$

1. a. Montrer que : $f(x)=2\sqrt{2}\cos x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
   b. Résoudre dans $[0,\pi]$: $f(x)=0$ puis $f(x)>0$
2. Soit $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto\frac{\sin 2x-1}{1+\cos 2x-\sin 2x}$
   a. Déterminer le domaine de définition D_g de g.
   b. Résoudre dans $[0,\pi]$: $g(x)\geq 0$

3) a) Montrer que pour tout $x\in D_g$: $g(x)=\frac{1}{2}(\tan x-1)$
   b) En déduire que : $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

Exercice n°12 :

1. Résoudre dans $[0,2\pi]$: $1+\cos x+\sin x>0$
2. Soit la fonction f définie par :
   $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}\,;\,x\mapsto\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\cos x+\sin x}}$
   a. Déterminer le domaine de définition de f.
   b. Etudier le signe de $f(x)$.