Exercice n°1

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x)=\pi-\dfrac{\sin(\pi x)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, interpréter graphiquement le résultat
4) a) Montrer que pour tout $x>0$; $\pi-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le \pi+\dfrac{1}{x}$

   b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; interpréter le résultat.
5) On pose pour tout $x\in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$; $k(x)=\tan x$ et $h(x)=g\circ k(x)$.
   a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$
   b) Etudier la continuité de h sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$
   c) Vérifier que pour $x\in \left]-\dfrac{\pi}{2},0\right[$; $h(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ et retrouver $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$

Exercice n°2

Soit $f: IR\to IR$; $x\mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+2x-1 & \text{si } x\le 1 \\ \dfrac{\sin 3(x-1)}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x\in]1,+\infty[$; $\dfrac{-1}{x-1}\le f(x)\le \dfrac{1}{x-1}$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b) Montrer que la droite $D: y=x-1$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.
3) Montrer que f est continue sur IR.

Exercice n°3

Soit $f: IR\to IR$; $x\mapsto \begin{cases} x^2-\cos x & \text{si } x<0 \\ \sqrt{x^2+1}-2 & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur IR.
2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$ et interpréter le résultat graphiquement.
3) a) Montrer que pour tout $x<0$: $x^2-1\le f(x)\le x^2+1$
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $IR_+^*\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x-1}$

1) a) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $\left|x\sqrt{x}.\sin\dfrac{1}{x}\right|\le x\sqrt{x}$

b) En déduire $\lim\limits_{0^+} f$

2) Calculer $\lim\limits_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

Exercice n°5

1) Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

   a) Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$

   b) En déduire l'image de l'intervalle $]1,+\infty[$ par f.

2) Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in]0,\frac{\pi}{2}[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$

   a) Montrer que g est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$.

   b) Montrer que pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$: $g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ et en déduire que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

   c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ et vérifier que $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=-1+\sqrt{x+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right) & \text{si } x\in\ ]-1,+\infty[\\ f(-1)=-1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $[-1,+\infty[$.
2) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.
3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]0,1[$ au moins une solution α

   b) Vérifier que $\tan\left(\dfrac{\pi}{\alpha+1}\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{\alpha}}$.

Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\pi^2x+\sqrt{1-x}}{|x|+1} & \text{si } x\in\ ]-\infty,1] \\ f(x)=\dfrac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2} & \text{si } x\in\ ]1,+\infty[\end{cases}$

1) a) Monter que f est continue en 1.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat graphiquement.

   c) Etudier la branche infinie de la courbe de f au voisinage de - ∞.
2) On admet que f est strictement décroissante sur $I=[1,3]$.

   a) Montrer que l'équation f(x) = 4x admet dans I une unique solution α et que 1< α < $\frac{4}{3}$

   b) Lequel des intervalles $I_1=\left]1,\frac{7}{6}\right[$ et $I_2=\left]\frac{7}{6},\frac{4}{3}\right[$ contient α ?