

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \sqrt{x}$

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Déterminer $f'(x)$
3. a. Vérifier que $f'(4) = 20$
 b. En déduire une approximation affine de $f(4+h)$ pour h proche de 0.
 Donner une valeur approchée de $f(4,01)$.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

Exercice n°2 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} g(x) = x\sqrt{1-x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ g(x) = x-1+\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

1. Montrer que g est continue en 1.
2. Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et en 1. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. Calculer $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \sin x$

1. Pour tout réel x , calculer $f'(x)$; $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = x \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + n \sin\left[x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

Exercice n°4 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$
2. a. Montrer que pour tout x de $] -\infty, 1[$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$
 b. En déduire la limite de f en $-\infty$.
3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
4. a. Etudier la dérivabilité de f en 1.
 b. Préciser les intervalles sur lesquels f est dérivable et calculer $f'(x)$.

5. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$

- a. Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- b. Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Exercice n°5 :<http://ymaths.e-monsite.com/>

I/ Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. Dresser le tableau de variation de f .
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]1, 2[$.
b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .
3. a. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
b. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$: $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|$

II/ Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ par
$$\begin{cases} g(x) = f\left[\left(\frac{1 - \tan x}{\tan x}\right)^2\right] & \text{si } x \neq 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue en 0.
2. Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et calculer $g'(x)$.
3. a. Vérifier que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$: $g(x) = \frac{1}{1 - \tan x}$.
b. Etudier la dérivabilité de g en zéro.

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2]$ par : $f(x) = x^3 \sqrt{2 - x}$

1. Montrer que f est continue sur $]-\infty, 2]$.
2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter géométriquement le résultat.
3. a. Etudier la dérivabilité de f .
b. Calculer $f'(x)$.
c. Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.
5. Montrer qu'il existe un réel $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 1$.
6. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice n°7 :

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

(C) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f .
b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ puis que $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α et que $2,3 < \alpha < 2,5$.
b. Montrer que $\left| \frac{4}{\sqrt{3}} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2} |2 - \alpha|$.
c. Tracer (C).