

Exercice n°1 :<http://ymaths.e-monsite.com/>I/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 24$.

1. Étudier la fonction g .
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α . En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

II/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-x^3 - 8x^2 + 4}{2x^2 + 2}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x on a $f'(x) = \frac{-2x \cdot g(x)}{(2x^2 + 2)^2}$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f .
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2} - 4$ est asymptote à la courbe C_f .

Étudier la position de la courbe C_f par rapport à la droite Δ .

5. Représenter la courbe C_f .

Exercice n°2 :I. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = 6x - 8x\sqrt{x} - \frac{1}{2}$ Le tableau de variations de h est :

x	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
h	$-\frac{1}{2}$	0	$-\infty$

Déduire que $h(x) \leq 0$ pour tout $x \in [0, \infty[$

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (4x - 1)\sqrt{x} - 4x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x + \frac{1}{x+1} & \text{si } x < 0 \text{ et } x \neq -1 \end{cases}$$
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$
2. Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 0 puis interpréter graphiquement ces résultats.
3. Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{\sqrt{x}}$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$
4. Dresser le tableau de variations de f .
5. Étudier les branches infinies de C_f .
6. Tracer C_f . (On admet que C_f admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{4}$)

Exercice n°3 :<http://ymaths.e-monsite.com/>

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$
 - a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
 - b. Montrer que pour $x > 0$; $\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$.
 - c. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -3$ puis dresser le tableau de variation de g .
 - d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .
Vérifier que $0 < \alpha < 1$
 - e. Dresser le tableau de signe de $g(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$
 - a. Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - b. Dresser le tableau de variation de f .
3. On désigne par (C) la courbe de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.
 - a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) .
 - b. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point d'abscisse 0.
 - c. Tracer (T) , Δ et (C)

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x) = x \tan x$.

1. Etudier la parité de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Démontrer que pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = \frac{2x + \sin(2x)}{2\cos^2 x}$
4. a. Déterminer les variations de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = 2x + \sin(2x)$.
b. En déduire les variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Dresser le tableau de variation complet de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
6. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$.
7. Soit (E) l'équation : $\tan x = \frac{1}{x}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Utiliser l'étude de f pour déterminer le nombre de solutions de (E) ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-2} de chacune d'elles.

<http://ymaths.e-monsite.com/>