Dérivabilité

Exercice N°1 :

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+24$.

a) Étudier la fonction g.

b) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha)=0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du réel α. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-x^3-8x^2+4}{2x^2+2}$

a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Montrer que, pour tout réel x on a $f'(x)=\dfrac{-2x\cdot g(x)}{(2x^2+2)^2}$.

c) Donner le tableau des variations de la fonction f.

Exercice N°2 :

Soit la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans [2,3].

3) a) Montrer que pour tout $x\in[2,3]$: $|f'(x)|\leq\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

b) En utilisant les inégalités des accroissements finies montrer que : pour tout $x\in[2,3]$;

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1-\alpha\right|\leq\frac{\sqrt{3}}{9}|x-\alpha| .$$

Exercice N°3 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ,1]$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et que $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}\,(1+\sqrt{1-x}\,)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=f(\sin x)$.

a) Montrer que g est dérivable à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ et que $g'_g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}$

b) Montrer que g est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.