••••••••••• Lycée Aguereb 2 •••••••••••		Prof : Rekik Sabeur
Devoir de contrôle n°1 (2 Heures)		
Année scolaire : 2012 - 2013	Le : 19 / 11 / 2012	Classe : 4 ième Math

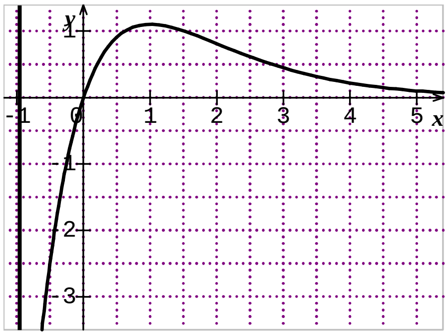
Exercice n°1 : (2 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie Le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1/ Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2,5]$ tel que $f([2,5])=[1,3]$ alors :

a/ $f(2)=3$ et $f(5)=1$ b/ $f(2)=1$ et $f(5)=3$ c/ $1<f(2)<3$

2/ Soit f une fonction continue sur $]-1,+\infty[$
et dont la courbe est donnée ci- contre.
On note que les droites des équations $x=-1$ et $y=0$ sont deux asymptotes de la courbe de f.



a/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\sqrt{1-x}\right)=+\infty$ b/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{2-x}{x}\right)=-1$ c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x.f\left(\frac{1-x}{2x}\right)=-\infty$

3/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 et i.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{z-i}{z-1}$ est un réel est :

a/ La droite (AB) privée de A b/ Le segment [AB] privé de A
c/ Le cercle de diamètre [AB] privé de A

4/ Si $z=(-1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors :

a/ $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{12}\,[2\pi]$ b/ $\arg(z)\equiv\frac{13\pi}{12}\,[2\pi]$ c/ $\arg(z)\equiv\frac{7\pi}{12}\,[2\pi]$

Exercice n°2 : (8 pts)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^2-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1 & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2-2x+2} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

1/ Montrer que f est continue sur IR.

2/ a/ Montrer que pour tout $x<1$: $x^2\leq f(x)\leq x^2+2$

b/ En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

3/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+1)$ et interpréter le résultat graphiquement.

4/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et déterminer $f'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

5/ a/ Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et que $f'_g(1)=2$.

b/ f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter le résultat graphiquement

Exercice n°3 : *(3 pts)*

Soit la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$

1/ Montrer que f est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$

2/ Déterminer $f\left(]1,+\infty[\right)$

3/ a/ Montrer que l'équation $1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$ admet une solution unique $\alpha\in\left[\dfrac{25}{16},\dfrac{16}{9}\right]$.

b/ Donner une valeur approchée à 10^{-2} prés de α.

Exercice n°4 : (7 pts)

Soit $\theta\in[0,\pi]$; on considère l'équation : $(E): z^2-(1+i)\left(e^{i\theta}+i\right)z+i\left(e^{i\theta}+i\right)^2=0$

1/ a/ Vérifie que $(1-i)^2=-2i$

b/ Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$; on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}+i$ et $z_2=ie^{i\theta}-1$

a/ Vérifier que $z_2=iz_1$

b/ Montrer que : $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$; α et β deux réels.

c/ Donner la forme exponentielle de z_1 puis de z_2.

3/ a/ Montrer que $M_1M_2^2=4(1+\sin\theta)$

b/ Déterminer la valeur de θ pour que M_1M_2 soit maximale.

BON TRAVAIL