Lycée : Aguereb 2	Devoir de contrôle n°1	Classe : $4^{\text{ème}}$ Sc Exp 2
Prof : Mr Rekik	Le : 08 – 11 – 2014	Durée : 2 Heures

Exercice n°1 : (4 points)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant la réponse**.

1/ Le nombre $\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)^5$ est un réel.

2/ Un argument du nombre complexe $z=-5\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ est $-\frac{\pi}{6}$.

3/ L'écriture exponentielle du nombre complexe $\left(\sqrt{3}+i\right)^8$ est $2^8 e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$.

4/ Si pour tout x réel strictement négatif, on a $\left|f(x)-3\right|\leq-\frac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$.

Exercice n°2 : (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On donne les points A, B et C d'affixes : $z_A=2i$; $z_B=\sqrt{3}-i$; $z_C=2i\,e^{i\theta}$; $\theta\in\,]0,2\pi[$

1/ Dans cette question on pose $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

a/ Placer dans le plan complexe les points A, B et C.

b/ Vérifier que $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire la nature exacte du triangle ABC.

2/ a/ Vérifier que $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b/ En déduire que $z_A-z_C=4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

c/ Déterminer θ pour que le triangle ABC soit isocèle en A.

3/ Déterminer et construire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tels que $\left|\bar{z}+2i\right|=\left|z+i-\sqrt{3}\right|$

Exercice n°3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{0\}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x^3\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$

1/ a/ Montrer que pour tout $x>0$; $\left|f(x)\right|\leq x^3$

b/ En déduire la limite de f à droite en 0

c/ f est elle prolongeable par continuité en 0

2/ a/ Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$

b/ Montrer que l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^3}$ admet au moins une solution dans [1, 2]

3/ Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pi$.

4/ Calculer ces limites :

a/ $\lim_{x\to+\infty} f\left(-x^3+x\right)$ b/ $\lim_{x\to1^+} f\left(\frac{2x}{x-1}\right)$

Exercice n°4 : (4 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1/ Montrer que f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

2/ a/ Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a $|f'(x)|\le\frac{1}{2}$.

b/ En déduire que pour tout $x\in[1,2]$; $1+\frac{1}{2}(1-x)\le f(x)\le\frac{1}{2}(1+x)$

c/ Déterminer un encadrement de $f(1{,}0004)$ d'amplitude moins de 10^{-3}.

BON TRAVAIL