

***** Lycée 9 Avril 1938 *****		Prof : Rekik Sabeur
Devoir de contrôle n°1 (2 Heures)		
Année scolaire : 2018 - 2019	Le : 14 / 11 / 20018	Classe : 4 ^{ème} Sc 2

Le sujet comporte deux pages

Exercice n°1 : (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\} \\ \sqrt{x^2 + 8} - x - 1 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$

1/ Montrer que f est continue en 1.

2/ a/ Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - \cos)$.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

b/ Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

3/ a/ Vérifier que pour tout $x \in]-\infty, 1[\setminus \{0\}$, on a $|f(x)| \leq |x|$

b/ En déduire que f est prolongeable par continuité en 0.

4/ a/ Vérifier que pour tout $x > 1$, $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x^2 + 8} + x} - 1$

b/ Déduire que f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et déterminer $f(]1, +\infty[)$.

5/ Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} f(x)\right)$.

a/ Montrer que g est continue sur $]1, +\infty[$.

b/ Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution α dans $\left] \frac{3}{2}, 2 \right[$.

c/ Montrer que $\alpha = \frac{23}{12}$.

Exercice n°2 : (6 points)

1/ a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z + 4 = 0$

On désigne par z_1 et z_2 les solutions de (E), z_1 étant celle dont la partie imaginaire est positive.

b/ Calculer le module et un argument de z_1 .

2/ Soit le nombre complexe U définie par : $U \cdot z_1 = 4\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right]$

a/ Exprimer U sous forme exponentielle.

b/ Vérifier que $U = 2(1+i)$.

c/ En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

3/ Déterminer les racines cubiques du nombre complexe U .

<http://ymaths.e-monsite.com/>

Exercice n°3 : (6 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_\theta): z^2 - (1 + 2\cos\theta)z + 1 + \cos\theta - i\sin\theta = 0$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

1/ a/ Développer $(1 + 2i\sin\theta)^2$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) .

2/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points

A et B d'affixes respectives $z_A = e^{-i\theta}$ et $z_B = 1 + e^{i\theta}$

a/ Ecrire z_B sous forme exponentielle.

b/ Déterminer l'ensemble des points B lorsque θ varie dans $]0, \pi[$.

c/ Déterminer l'affixe du point C pour que OACB soit un parallélogramme.

d/ Déterminer la valeur de θ pour que OACB soit un rectangle.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

BON TRAVAIL