▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪ *Lycée 9 Avril 1938* ▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪		*Prof : Rekik Sabeur*
Devoir de contrôle n°1 (2 Heures)		
Année scolaire : 2019 - 2020	*Le : 13 / 11 / 20019*	*Classe : $4^{ième}$ Sc 3*

Le sujet comporte deux pages

Exercice n°1 : *(8 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x<0\\ \sqrt{x^2+1}-2x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Montrer que f est continue en 0.

http://ymaths.e-monsite.com/

b/ En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

2/ a/ Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$ on a : $1+\dfrac{2}{x}\leq f(x)\leq 1$.

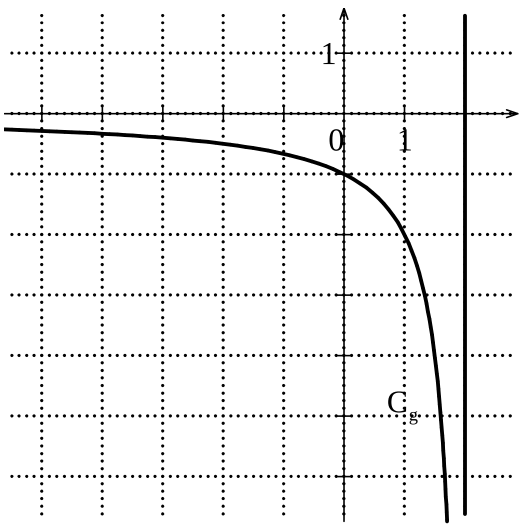
b/ En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ a/ Monter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

b/ Montrer que la droite d'équation $y=-x$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.

4/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-2,-1\right[$.

5/ La courbe C_g ci-contre est la représentation graphique d'une fonction g continue sur $\left]-\infty,2\right[$. Les droites d'équation $y=0$ et $x=2$ sont les asymptotes de C_g.



a/ Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$

b/ Soit la fonction h définie sur $\left]-\infty,2\right]$ par

$h(x)=\begin{cases} f\circ g(x) & \text{si } x\in\left]-\infty,2\right[\\ 1 & \text{si } x=2\end{cases}$

Montrer que h est continue sur $\left]-\infty,2\right]$.

Exercice n°2 : *(6 points)*

1/ Soit les nombres complexes $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2=1+i\sqrt{3}$

a/ Ecrire z_1 sous forme algébrique.

b/ Ecrire z_2 sous forme exponentielle.

2/ Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A=\sqrt{2}\,z_1$ et $z_B=i\overline{z_2}$.

a/ Montrer que OAB est un triangle isocèle.

b/ Ecrire $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

c/ En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$.

http://ymaths.e-monsite.com/

d/ Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3/ Pour tout point $M(z) \in P \setminus \{B\}$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$

a/ Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit la droite $(O, \vec{u})$.

b/ Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice n°3 : *(6 points)*

1/ a/ Montrer que pour tout réel θ on a : $\cos^2\theta + 2\sin\theta - 2 = (i\sin\theta - i)^2$

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 2 - 2\sin\theta = 0$

2/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = e^{i\theta} - i$, $z_B = e^{-i\theta} + i$ et $z_C = 2\cos\theta$ avec $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

a/ Montrer que $z_A = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

b/ En déduire que $\dfrac{z_B}{z_A} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

http://ymaths.e-monsite.com/

c/ Montrer que OACB est un losange.

d/ Déterminer la valeur de θ pour que OACB soit un carré.

BON TRAVAIL