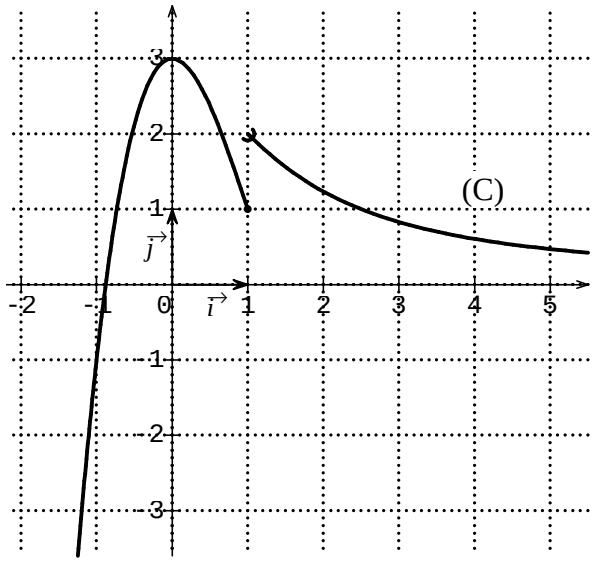
Lycée : 9 avril 1938	**Devoir de contrôle n°1**	Classes : 4ème Sc Techniques
◈◈◈◈◈	Le : 26 – 10 – 2017	Durée : 2 heures

Le sujet comporte deux pages

Exercice n°1 : (4 points)

On donne la courbe (C) d'une fonction f définie sur IR.



- L'axe des abscisses est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.
- C admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

Utiliser la courbe pour répondre aux questions suivantes :

1/ Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

2/ La fonction f est elle continue à droite en 1 ? à gauche en 1 ? en 1 ? Justifier.

3/ Déterminer $f([-1,1[)$, $f([0,+\infty[)$ et $f([-1,0])$

4/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]-1,0[$.

5/ Déterminer $\lim\limits_{x\to2^+} f\left(\dfrac{x}{2-x}\right)$.

http://ymaths.e-monsite.com/

Exercice n°2 : (6 points)

A/ Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ par $g(x)=\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)\sin(x-1)$

1/ Vérifier que pour tout $x\in IR\setminus\{1\}$, $g(x)=\dfrac{x\sin(x-1)}{x-1}$

2/ En déduire que g est prolongeable par continuité en 1.

B/ Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x<1 \\ \sqrt{x^2+2x-3}-2x+1 & \text{si } x>1 \\ 1 & \text{si } x=1 \end{cases}$

1/ a/ Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 1.
La fonction f est elle continue en 1 ?

b/ Déterminer les intervalles sur les quels f est continue.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x)$

3/ a/ Vérifier que pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a : $\dfrac{x}{1-x}\le f(x)\le\dfrac{x}{x-1}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

http://ymaths.e-monsite.com/

Exercice n°3 : ***(4 points)***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$, $b=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $c=a+b$

1/ Ecrire les nombres complexes a, b et $\dfrac{b}{a}$ sous forme exponentielle.

2/ En déduire la nature du triangle ABO.

3/ Placer avec précision les points A, B et C puis montrer que OACB est un carré.

4/ Déterminer une mesure de $\left(\vec{u},\overrightarrow{OC}\right)$ puis déduire une écriture de c sous forme exponentielle.

Exercice n°4 : ***(6 points)***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne les points A et B d'affixes respectives i et $-i$.

A tout point $M(z)$ distinct de B, on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{1+iz}{z+i}$

1/ a/ Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ on a $|z'|=\dfrac{AM}{BM}$

b/ En déduire l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de $[AB]$.

2/ a/ Montrer que $\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM'}}\right)=\dfrac{\pi}{2}+\left(\overrightarrow{MB},\widehat{\overrightarrow{MA}}\right)+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

b/ Montrer que si M est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ privé de A et B alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

3/ On pose $z=ie^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0,\pi\right[$.

a/ Donner l'écriture exponentielle de $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$.

b/ En déduire que $z'=-\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

BON TRAVAIL

http://ymaths.e-monsite.com/