Lycée : 9 avril 1938	**Devoir de contrôle n°1**	Classes : $4^{\text{ème}}$ Sc Tech 2, 3 et 5
◈◈◈◈◈	Le : 02 – 11 – 2016	Durée : 2 heures

Le sujet comporte deux pages

Exercice n°1 : (3 points)

I/ **QCM :** Il n'ya qu'une bonne réponse parmi les réponses proposées, indiquer le numéro et la lettre correspondante. Aucune justification n'est demandée.

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x)=\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ b/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ c/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2/ Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

Soit $z\in\mathbb{C}^*\setminus\{1\}$ tel que $\arg(z)-\arg(z-1)=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Si M est le point du plan d'affixe z, alors on a :

a/ $M\in(OI)$ b/ $M\in(OJ)$ c/ $M\in$ cercle de diamètre $[OI]$

II/ **Vrai ou faux :** Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1/ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et si pour tout $x<1$, on a $g(x)=2x+\sqrt{1-x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)=+\infty$

2/ Si $\frac{\pi}{6}$ est un argument de z, alors un argument de $\frac{i}{z^2}$ est $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice n°2 : (7 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x^3+4\sqrt{x}-1$

1/ Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2/ Montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3/ a/ En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,1[$ une solution unique α.

b/ Vérifier que $1-\alpha^3=4\sqrt{\alpha}$.

4/ Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

B/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1-x^3}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0<x\le\alpha \\ g(x)=1-\sqrt{f(x)} & \text{si } \alpha<x\le 1 \\ g(x)=4-3x-\cos(\pi x) & \text{si } x>1 \end{cases}$

1/ La fonction g est-elle continue en 1 ? http://ymaths.e-monsite.com/

2/ Montrer que g est continue en α.

3/ La fonction g est-elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

4/ a/ Montrer que pour tout réel $x>1$ on a : $3(1-x)\le g(x)\le 5-3x$

b/ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$

<u>Exercice n°3 : (6 points)</u>

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3}$.

1/ Ecrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.

2/ Montrer que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

3/ Soit C le point de P tel que : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

a/ Placer, dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B et C et préciser la nature du quadrilatère OACB.

b/ Donner, en fonction de z_A et z_B , l'affixe z_C du point C.

c/ Vérifier que $z_B = i z_A$ puis donner la forme trigonométrique de z_C.

d/ En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et celle de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

<u>Exercice n°4 : (4 points)</u>

Soit $Z = \frac{\bar{z}}{1+iz}$ où z est un nombre complexe différent de i.

On désigne par M et N les points d'affixes respectives z et Z. On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1/ Donner la forme exponentielle de $\bar{z}$ et de $1+iz$.

2/ En déduire la forme exponentielle de Z.

3/ Pour quelle valeur de θ les points O, M et N sont alignés.

<u>BON TRAVAIL</u>