

Lycée : 9 avril 1938	Devoir de contrôle n°2	Classes : 4 ^{ème} Sc Tech 2, 3 et 5
◆◆◆◆◆	Le : 08 – 03 – 2017	Durée : 2 heures

Le sujet comporte trois pages

Exercice n°1 : (3 points)

I/ **QCM :** Il n'y a qu'une bonne réponse parmi les réponses proposées, indiquer sur votre copie le numéro et la lettre correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x-2)$

1°/ $f(e^2 + 2) =$

<http://ymaths.e-monsite.com/>

a/ 0 ; b/ -1 ; c/ 2

2°/ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) =$

a/ $-\infty$; b/ $+\infty$; c/ 0

II/ **Vrai ou faux :** Répondre par vrai ou faux en justifiant.

1°/ Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto F(-x)$ est une primitive de $x \mapsto f(-x)$ sur $\mathbb{R}$.

2°/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormée directe.

Exercice n°2 : (4 points)

Dans l'annexe ci-jointe (figure 1) est représentée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

T est la tangente à la courbe C au point $A(1, 0)$ et qu'elle passe par le point de coordonnées $(0, 1)$.

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe C .

La courbe C admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

A/ 1°/ Par lecture graphique :

a/ Déterminer les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$ en justifiant la valeur de $f'(1)$.

b/ Donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2°/ On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + b$, où a et b sont deux réels.

a/ Calculer $f'(x)$.

b/ En utilisant les valeurs trouvées pour $f(1)$ et $f'(1)$ à la question 1°, calculer a et b .

B/ On donne la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2$.

1°/ Montrer que la courbe C admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

2°/ On donne la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x \ln x - x$.

a/ Calculer $g'(x)$

b/ En déduire la primitive F de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

Exercice n°3 : (6 points)

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} g(x) = x \ln x - x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ a/ Montrer que g est continue à droite en 0.

b/ Etudier la dérivabilité de g à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°/ a/ Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \ln x$

b/ Dresser le tableau de variation de g .

3°/ a/ Ecrire une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e .

b/ Pour $x \in]0, +\infty[$ on pose $h(x) = g(x) - x + e$

Etudier le sens de variation de h , en déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T .

4°/ a/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

b/ Construire T et $\mathcal{C}$ sur la figure 2 de l'annexe.

5°/ Montrer que la fonction G définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = \frac{1}{4}x^2(2 \ln x - 3)$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction g .

Exercice n°4 : (7 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(2, 1, -3)$, $B(1, -2, -1)$ et $C(-2, 3, -1)$

A/ 1°/ Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

2°/ Calculer l'aire du triangle ABC .

3°/ Calculer la distance du point C à la droite (AB) .

B/ Soit $I(0, 1, 1)$.

1°/ Montrer que les points A , B , C et I sont non coplanaires.

2°/ a/ Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre $ABCI$.

b/ En déduire la distance d du point I au plan (ABC) .

3°/ a/ Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) .

b/ Retrouver la distance d du point I au plan (ABC) .

4°/ a/ Justifier que les droites (AI) et (BC) sont non coplanaires.

b/ Calculer la distance d' entre ces deux droites.

Figure 1 :

<http://ymaths.e-monsite.com/>

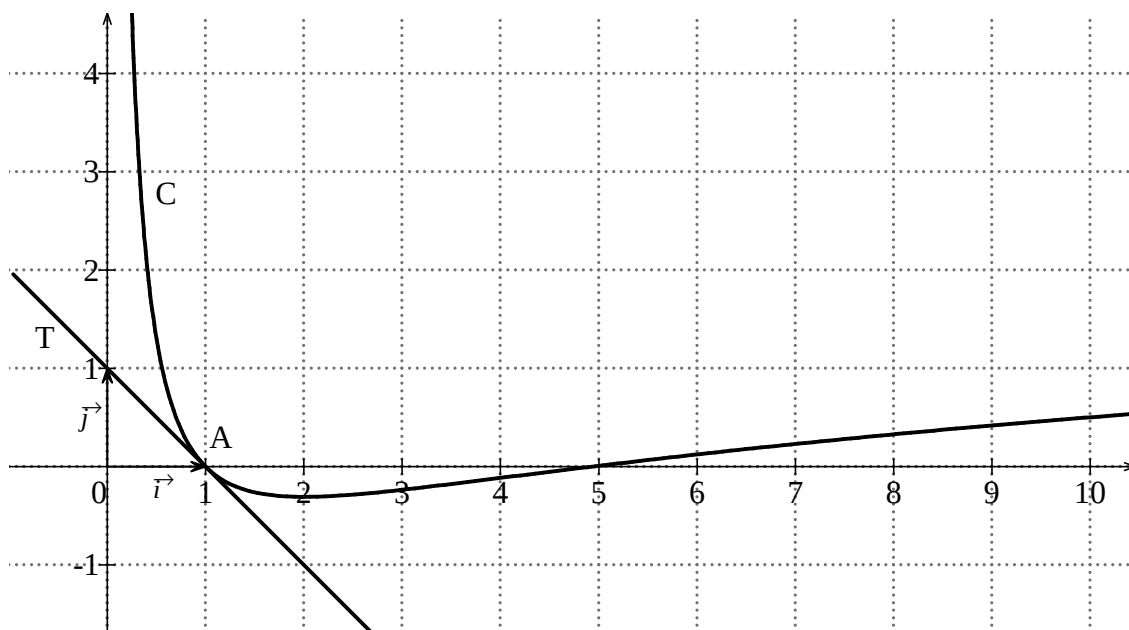


Figure 2 :

