▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪ *Lycée Aguereb 2* ▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪▪		*Prof : Rekik Sabeur*
Devoir de contrôle n°1 (2 Heures)		
Année scolaire : 2012 - 2013	*Le : 23 / 02 / 2013*	*Classe : 4 ième Math*

Exercice n°1 : (2 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1/ Une primitive sur $]-1,+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$ est donnée par $F(x)=$

a/ $\dfrac{1}{2(1-x)^2}$ b/ $\dfrac{1}{4(1-x)^4}$ c/ $\dfrac{-1}{2(1-x)^2}$

2/ $I=\int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ et $J=\int_0^1 t\sin^2(\pi t)dt$. Alors $I+J$ est égal à :

a/ 1   b/ $\dfrac{1}{2}$ c/ 0

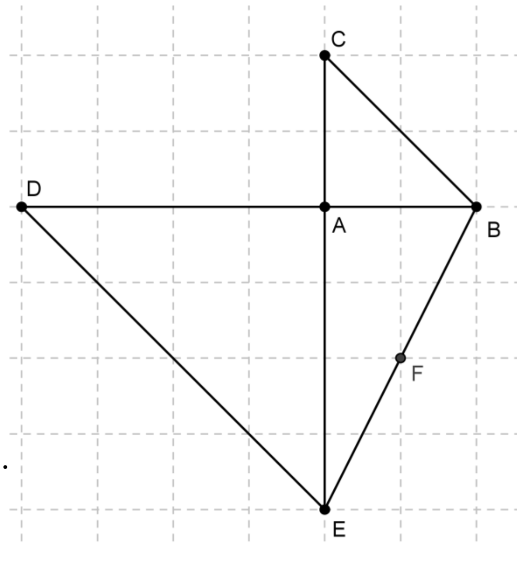
3/ La composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 et de la symétrie orthogonale d'axe passant par Ω est :

a/ une translation   b/ un déplacement   c/ une similitude indirecte de centre Ω

4/ L'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=(1+i)z+2i$ est

a/ une rotation   b/ une translation   c/ ni une rotation ni une translation.

Exercice n°2 : (7 pts)



Dans la figure ci-contre, ABC et ADE sont deux triangles isocèles et rectangle tels que : $AB=1$,

$AD=2$, $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}})\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

On note F le milieu du segment $[BE]$.

1/ Soit f la similitude directe qui envoie A en C et D en A.

a/ Préciser le rapport et l'angle de f.

b/ Déterminer les images par f des droites (CD) et (AF).

c/ Déterminer et construire le centre I de f.

2/ Soit $g=S_\Delta\circ f^{-1}$ où S_Δ désigne la symétrie orthogonale d'axe Δ la médiatrice du segment $[BC]$.

a/ Déterminer $g(C)$ et $g(A)$.

b/ Prouver que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

c/ Soit G le symétrique de A par rapport de C. $g(G)=G$.

d/ Caractériser g.

Exercice n°3 : (5 pts)

1/ Soit $u(x) = 2\sin x - 1$ définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Etudier le sens de variation de u sur I et montrer que $u(I) =]-3, 1[$.

2/ Soit $F(x) = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ où $x \in I$.

a/ Justifier l'existence de F sur I.

b/ Montrer que F est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée $F'(x)$ puis calculer $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

c/ En déduire que pour tout x de I, $F(x) = x - \frac{\pi}{6}$

3/ Soit $K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$. Vérifier que $K = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)$. En déduire la valeur de K.

Exercice n°4 : (6 pts)

Soit (I_n) la suite définie sur IN par $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1+t}\, dt$

1/ Calculer I_0

2/ a/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

b/ En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3/ Soit $g(t) = \sqrt{1+t}$, $t \in [0, 1]$

a/ Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $0 \leqslant g'(t) \leqslant \frac{1}{2}$ et que pour tout $x \in [0, 1]$,

$0 \leqslant \sqrt{2} - g(x) \leqslant \frac{1}{2}(1-x)$

b/ En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, on a : $\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leqslant I_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n+1}$

c/ Déterminer la limite de la suite (I_n) .

4/ a/ En effectuant une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$(2n+3)I_n + 2nI_{n-1} = 4\sqrt{2}$

b/ Calculer alors I_1