

Lycée : 9 avril 1938	Devoir de contrôle n°3	Classes : 4 ^{ème} Sc Techniques
◆◆◆◆◆	Le : 17 – 04 – 2017	Durée : 2 heures

Le sujet comporte deux pages

Exercice n°1 : (3 points)

Les questions 1/, 2/, et 3/ sont indépendantes.

1/ Calculer les limites suivantes : (On justifiera soigneusement)

$$a/ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)e^x \quad ; \quad b/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$$

<http://ymaths.e-monsite.com/>

$$2/ \text{ Soient } I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \text{ et } J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$$

$$a/ \text{ Montrer que } I = \frac{1}{2} \ln 2$$

b/ Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de J .

3/ A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $K = \int_0^1 x e^{1-x} dx$

Exercice n°2 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$)

$$1/ a/ \text{ Vérifier que } f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

b/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

$$2/ a/ \text{ Montrer que } f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$$

b/ Dresser le tableau de variation de f

c/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0

3/ Tracer (T) et (C) .

$$4/ a/ \text{ Vérifier que } f(x) = -1 + \frac{4e^x}{e^x + 1}$$

$$b/ \text{ Calculer l'intégrale } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

5/ a/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

$$b/ \text{ Montrer que } f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{3-x}\right) \text{ pour } x \in J.$$

Exercice n°3 : (5 points)

Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de classes terminales, on constate que :

- 60 % des élèves sont des filles.
- 40 % des filles sont des myopes.
- 30 % des garçons sont des myopes.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

1/ On choisit au hasard un élève, on désigne par

M : "l'élève est myope" et F : "l'élève est une fille".

a/ Calculer la probabilité des événements suivants :

- L'élève est un garçon.
- L'élève est une fille myope.
- L'élève est un garçon myope.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

b/ En déduire que $p(M) = 0,36$.

2/ L'enquête révèle aussi que :

- Parmi les élèves myopes, la moitié ont des parents myopes.
- Parmi les élèves non myopes 65 % ont des parents non myopes.

a/ Calculer la probabilité que l'élève choisi a des parents myopes.

b/ Calculer la probabilité que l'élève soit myope sachant que ses parents soient myopes.

3/ On choisit quatre élèves au hasard et on admet que le choix est assimilé à un tirage avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins un parmi ces élèves ne soit pas myope.

Exercice n°4 : (6 points)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, les points $A(1,1,9)$, $B(-2,0,5)$ et $C(-1,2,3)$.

1/ Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et déduire que $2x - 2y - z + 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2/ Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$

a/ Montrer que (S) est une sphère de centre $I(3, -2, 1)$ et de rayon $R = 10$.

b/ Vérifier que le point $F(3, 6, 7)$ appartient à la sphère (S)

c/ Ecrire une équation cartésienne du plan P tangent à (S) au point F.

3/ a/ Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera son centre et son rayon r.

b/ Déduire une équation cartésienne de la sphère (S') de centre $I'(1, 0, 2)$ et contenant le cercle $\mathcal{C}$.

4/ On considère la droite $\Delta = \mathcal{D}(E, \vec{u})$ avec $E(13, 3, \frac{3}{2})$ et $\vec{u} = 8\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$.

Calculer $\overrightarrow{EI} \wedge \vec{u}$ puis déduire que Δ est tangente à (S).

<http://ymaths.e-monsite.com/>