

Lycée : Aguerb 2	Devoir de contrôle n°3	4^{ième} Mathématiques
Prof : Mr Rekik Sabeur	Le : 15 – 04 – 2013	Durée : 2 Heures ☕

Exercice n°1 : (3 pts)

I/ Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1/ Le quotient de -34558 par 117 est

- a/ -295 b/ 295 c/ -296

2/ Un inverse de 2010 modulo 19 est

- a/ 14 b/ 15 c/ 16

3/ Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

- a/ $y(x) = k e^{-2x} + 3$ b/ $y(x) = k e^{2x} + 3$ c/ $y(x) = k e^{-2x} - 3$ ($k \in \mathbb{R}$)

4/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 3\sin(-2x)$, solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ où ω est un réel. Alors ω est égal à :

- a/ 1 b/ 2 c/ 3

II/ Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse :

1/ Pour tout entier naturel n non nul, $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 .

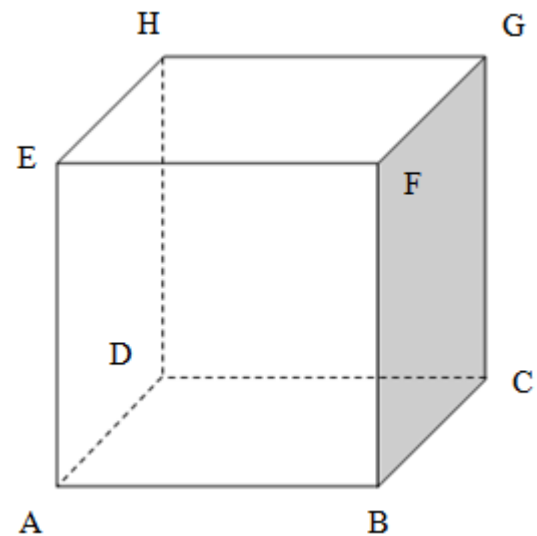
2/ Soit x un entier relatif. $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ si et seulement si $x \equiv 1 \pmod{5}$.

Exercice n°2 : (7 pts)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 , représenté ci-contre.

On rapporte l'espace du repère

orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1/ a/ Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E, F, G et H.

b/ Vérifier que $\overrightarrow{DE} \wedge \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AG}$.

En déduire l'aire du triangle EDB.

b/ Donner une équation cartésienne du plan P passant par les points E, D et B.

c/ Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre EDBG.

2/ On désigne par S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + \frac{1}{2} = 0$

a/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

b/ Vérifier que $\Omega \in (AG)$ et que la droite (HC) est tangente à S.

c/ Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant un cercle dont on déterminera le centre J et le rayon r.

3/ On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et par Q le plan passant par les points H, F et C. Montrer que $h(P) = Q$.

Exercice n°3 : (4 pts)

Soit l'équation différentielle (E): $y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

1/ Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ est une solution de (E).

2/ Résoudre l'équation différentielle (E'): $y' + y = 0$

3/ a/ Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si $(y - g)$ est solution de l'équation (E')

b/ En déduire la solution y de (E).

4/ Déterminer une solution de (E) dont la représentative graphique admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 0.

Exercice n°4 : (6 pts)

1/ Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $8x - 3y = 7$

2/ Soit $a = 3n + 2$ et $b = 8n + 3$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

a/ Montrer que (a, b) est une solution de l'équation (E).

b/ Déterminer les valeurs possibles de $d = a \wedge b$.

c/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que a et b sont premiers entre eux.

3/ On considère le système (S):
$$\begin{cases} n \equiv 3 \pmod{8} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

a/ Montrer que n est solution de (S) si et seulement si $n \equiv 11 \pmod{24}$

b/ Montrer que 2027 est une solution de (S).

c/ Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de 3^{2k} modulo 8 et le reste de 3^{2k} modulo 3.

d/ En déduire que $2027^{2010} - 1$ est divisible par 24.

BON TRAVAIL