| Lycée : 7 /11 / Métouia | **Devoir de synthèse n°1** | Classes : $3^{ème}$ Math 1 et 2 |
|---|---|---|
| Prof : Mr saada et Mr Rekik | Le : 4 / 11 / 2007 | Durée : 2 heures |

**Exercice n°1 : (5 points)**

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. a. Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote horizontale D au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ dont on donnera une équation.
   b. Etudier la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à son asymptote D sur $]3,+\infty[$ .
3. Calculer les limites de f à droite et à gauche en 3. Interpréter le résultat graphiquement.
4. La fonction f est – elle prolongeable par continuité en 1 ? Si oui définir ce prolongement.

**Exercice n°2 : (5 points)**

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Montrer que pour tout $x\geq 1$, $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$
   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.
2. a. Montrer que la droite $\Delta : y=\dfrac{x}{2}-1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   b. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$, $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}<1$
   c. En déduire la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $\Delta$.

**Exercice n°3 : (5 points)**

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On donne le point A de coordonnées cartésiennes $\left(2\sqrt{3},\ 2\right)$ et le point B de coordonnées polaires $\left(4,\frac{\pi}{2}\right)$.

1. a. Déterminer les coordonnées polaires de A.
   b. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B.
   c. Placer les points A et B dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. a. Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OB}\right)$.
   b. En déduire la nature du triangle OAB.
3. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan P tels que : $\widehat{(\overrightarrow{MA}\ ,\ \overrightarrow{MB})}\equiv\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

**Exercice n°4 : (5 points)**

Soit x un réel et $A(x)=1-\cos 2x-\sin 2x$

1. Calculer $A\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ et $A\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
2. a. Montrer que pour tout réel x on a : $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
   b. Sachant que $1-\cos 2x=2\sin^2 x$, montrer que pour tout réel x, $A(x)=2\sqrt{2}\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
   c. En déduire la valeur de $\sin\frac{\pi}{12}$
3. Résoudre dans IR, puis dans $[0,\ 2\pi[$ , l'équation : $A(x)=0$
4. a. Vérifier que pour tout réel x on a : $A(x)=1-\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$
   b. Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ l'inéquation : $A(x)\geq 0$