Lycée : 9 Avril 1938	Devoir de synthèse n°1	Classe : $4^{ème}$ Sc Exp 2
Prof : Mr Rekik	Le : 18 – 12 – 2014	Durée : 2 Heures

Exercice n°1 : (3 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1/ Soit la fonction f définie sur IR^* par $f(x)=1-\frac{x}{2}\sin\left(\frac{2}{x}\right)$

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ b/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ c/ f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2/ Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle $[1, 2]$ telle que :

pour tout $t\in[1,2]$, $-2\le f'(t)\le 3$ alors :

a/ $|f(2)-f(1)|\le 2$ b/ $|f(2)-f(1)|\le 3$ c/ $-2\le f(2)-f(1)\le 3$

3/ Soit f une fonction continue sur IR tel que $|f(x)|<1$, alors l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,1[$

a/ Une unique solution b/ Au moins une solution c/ Aucune solution

4/ Si $z=(-1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors :

a/ $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{12}[2\pi]$ b/ $\arg(z)\equiv\frac{13\pi}{12}[2\pi]$ c/ $\arg(z)\equiv\frac{7\pi}{12}[2\pi]$

Exercice n°2 : (7 points)

A/ 1/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-2z+2=0$

2/ Soit l'équation $(E): z^3-2(1+i)z^2+2(2i+1)z-4i=0$, $z\in\mathbb{C}$

a/ Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .

B/ 1/ Soit l'équation $(E'): z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ avec $\theta\in]0,\pi[$

a/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E') on notera z_1 la solution tel que $\mathrm{Im}\,(z_1)>0$ et z_2 l'autre solution.

b/ Vérifier que $z_1=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note M′, M″ et A les points d'affixes respectifs $z'=1+e^{i\theta}$, $z''=1-e^{i\theta}$ et $z_A=2$.

Montrer que OM′AM″ est un parallélogramme et déterminer θ pour que OM′AM″ soit un losange.

Exercice n°3 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

1/ Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

2/ a/ Monter que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a $f(x)=1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$

b/ En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ a/ Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Déterminer $f^{-1}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

c/ Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice n°4 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=1+2\cos x$.

1/ Dresser le tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

2/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-1,3]$.

3/ a/ f^{-1} est-elle dérivable à droite en -1 ? à gauche en 3 ?

b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-1,3[$ et que pour tout $x\in]-1,3[: \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

BON TRAVAIL