Devoir de synthèse n°1 (2 Heures)

Année scolaire : 2019 - 2020	Le : 05 / 12 / 2019	Classes : 4[ième] Sc 2 + 3

Le sujet comporte deux pages

Exercice n°1 : *(6,5 points)*

A/ 1/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$; $\theta\in\left]0,\pi\right[$

2/ Soit l'équation $(E): z^3-4z^2+\left(5-e^{2i\theta}\right)z-2+2e^{2i\theta}=0$

a/ Vérifier que 2 est une solution de l'équation (E).

b/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

B/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On désigne par I, A, M et N les points d'affixes respectives $z_I=1$, $z_A=2$, $z_M=1+e^{i\theta}$ et $z_N=1-e^{i\theta}$ avec $\theta\in\left]0,\pi\right[$

1/ a/ Montrer que M et N sont symétrique par rapport à I.

b/ Déterminer l'ensemble (Γ_1) des points M lorsque θ varie dans $\left]0,\pi\right[$.

c/ En déduire l'ensemble (Γ_2) des points N lorsque θ varie dans $\left]0,\pi\right[$.

2/ a/ Ecrire z_M sous forme exponentielle

b/ Vérifier que $z_N=2\sin\dfrac{\theta}{2}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

c/ Montrer que OMAN est un rectangle.

d/ Déterminer la valeur de θ pour que OMAN soit un carré.

Exercice n°2 : *(7 points)*

Soit f la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $f(x)=1-\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{-1}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$$

b/ Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,+\infty\right[$

4/ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]0,1\right[$.

5/ Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} g(x)=f(\tan x) & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

a/ Montrer que f est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$ et en déduire que g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

b/ Montrer que g est dérivable en $\dfrac{\pi}{4}$ et calculer $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Exercice n°3 : *(6,5 points)*

1/ Soit f la fonction définie par $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{2x}$

Montrer que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$, $1\le f\left(x\right)\le x$

2/ Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=\dfrac{3}{2}$ et $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n\ge 1$

b/ Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante et en déduire qu'elle est majorée par $\dfrac{3}{2}$.

c/ Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.

3/ a/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\left|u_{n+1}-1\right|\le\dfrac{1}{4}\left|u_n-1\right|$

b/ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\left|u_n-1\right|\le\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

c/ Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4/ Soit $\left(t_n\right)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n=\dfrac{S_n}{n^2}$ où $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$

a/ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{1}{n}\le t_n\le\dfrac{3}{2n}$

b/ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n$

http://ymaths.e-monsite.com/

BON TRAVAIL