| Lycée : 9 avril 1938 | **Devoir de synthèse n°1** | Classe : 4ème Sc Tech 3 |
| --- | --- | --- |
| ◈◈◈◈◈ | Le : 10 – 01 – 2017 | Durée : 2 heures |

***Le sujet comporte 3 pages***



***<u>Exercice n°1 :</u> (6 points)***

A/ Pour tout nombre complexe z on pose $f(z)=z^3-2(1+i)z^2+2(2i+1)z-4i$

1/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-2z+2=0$

2/ a/ Calculer $f(2i)$

b/ Déterminer les nombres complexes b et c tels que pour tout $z\in\mathbb{C}$ ;

$f(z)=(z-2i)(z^2+bz+c)$

c/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z)=0$.

B/ 1/ Soit l'équation $(E): z^2-2z+1-e^{2i\theta}=0$ avec $\theta\in\left]0,\pi\right[$

a/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)$ on notera $z_1$ la solution tel que Im $(z_1)>0$ et $z_2$ l'autre solution.

b/ Vérifier que $z_1=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

2/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note $M'$, $M''$ et A les points d'affixes respectifs $z'=1+e^{i\theta}$, $z''=1-e^{i\theta}$ et $z_A=2$.

Montrer que $OM'AM''$ est un parallélogramme et déterminer $\theta$ pour que $OM'AM''$ soit un losange.

***<u>Exercice n°2 :</u> (5 points)***

On considère la fonction f définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=1+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

2/ a/ Monter que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$ on a $f(x)=1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$

b/ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que pour tout $x\in\left]0,+\infty\right[$ on a $f'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

4/ a/ Montrer que f réalise une bijection de $\left]0,+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Déterminer $f^{-1}(1+\sqrt{2})$.

c/ Montrer que $f^{-1}$ est dérivable en $1+\sqrt{2}$ et calculer $(f^{-1})'(1+\sqrt{2})$.

5/ Donner l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

***Exercice n°3 :*** ***(3 points)***

La courbe C dans **l'annexe** est d'une fonction f définie sur $]0,1]$ ; f est dérivable en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$. Répondre aux questions suivantes dans l'annexe et la rendre avec la copie.

1/ a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-2}{x-1}$.



b/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ a/ Justifier que f admet une fonction réciproque $f^{-1}$ et préciser son ensemble de définition J.

b/ Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}$.

c/ Déterminer $f^{-1}(1)$ puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

3/ Construire dans l'annexe la courbe $C'$ de la fonction $f^{-1}$.

***Exercice n°4 :*** ***(6 points)***

Soit $(U_n)$ une suite réelle définie sur IN par : $U_0=-2$ et $U_{n+1}=\frac{4U_n+3}{U_n+6}$ pour tout $n\in$ IN.

1/ a/ Montrer que pour tout $n\in$ IN : $-2\leq U_n<1$

b/ Montrer que la suite $(U_n)$ est croissante.

c/ En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2/ a/ Montrer que pour tout $n\in$ IN : $1-U_{n+1}\leq\frac{3}{4}(1-U_n)$

b/ En déduire que pour tout $n\in$ IN : $1-U_n\leq 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

c/ Retrouver la limite de $(U_n)$ en $+\infty$.

3/ Soit $(V_n)$ la suite définie sur IN par : $V_n=\frac{U_n+3}{U_n-1}$

a/ Montrer que la suite $(V_n)$ est géométrique de raison $q=\frac{7}{3}$.

b/ Exprimer $V_n$ en fonction de n, puis $U_n$ en fonction de n.

c/ Retrouver la limite de $(U_n)$ en $+\infty$.

http://ymaths.e-monsite.com/

## *Annexe ( A rendre avec la copie )*

**Nom et prénom :** …………………………………………….. **Classe :** ………………….

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………