

Exercice n°1 : (2 pts)

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

- 1/ si f est une isométrie qui fixe deux points distincts alors $f = S_{(AB)}$.
- 2/ Soient Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 trois droites strictement parallèles. L'isométrie $f = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_3}$ est une symétrie glissante
- 3/ Soit f la fonction définie sur $[0; \pi]$ par $f(x) = \cos x$ alors $(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
- 4/ La courbe représentative dans un repère du plan de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ possède deux points d'inflexion.

Exercice n°2 : (6pts)

- 1/ a/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
 b/ Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.
- 2/ On pose $u = \frac{1}{2} \left[(1-i) + \sqrt{3}(1+i) \right]$
 a/ Calculer u^2 .
 b/ Déterminer la forme trigonométrique de u.
 c/ En déduire alors les valeurs de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- 3/ Soit l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0$
 a/ Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E) .
 b/ Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) .
- 4/ Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On donne les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} - i$; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2i$
 a/ Représenter les points A, B et C.
 b/ Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

Exercice n°3 : (5 pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O inscrit dans un cercle \mathcal{C} .

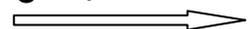
On pose $E = S_A(C)$, $I = S_O(C)$ et $J = S_O(B)$.

I/ 1/ Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{AB} , déterminer la droite Δ tel que $t = S_{\Delta} \circ S_{(AJ)}$.

2/ Soit r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $-\frac{2\pi}{3}$.

a/ Montrer que $(\overrightarrow{AI}, \widehat{AB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et que $(\overrightarrow{AI}, \widehat{AJ}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

b/ Déterminer la droite Δ' tel que $r = S_{(AJ)} \circ S_{\Delta'}$ puis identifier alors $t \circ r$.



II/ Soit F le point du plan tel que ABCF est un parallélogramme.

1/ Montrer que le triangle EBF est équilatéral direct de centre A.

2/ Soient $f = t_{\overline{AB}} \circ S_{(AB)}$ et R la rotation de centre I d'angle dont une mesure est $-\frac{2\pi}{3}$.

a/ Déterminer $R^{-1} \circ f(A)$ et $R^{-1} \circ f(E)$

b/ Identifier alors $R^{-1} \circ f$.

c/ En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = R(M)$.

3/ Soit g une isométrie tel que $g(E) = C$ et $g(A) = B$, on pose $\varphi = t_{\overline{BA}} \circ g$.

a/ Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(E)$.

b/ Montrer que $\varphi = S_{(AB)}$ ou $\varphi = R_{(A, -\frac{2\pi}{3})}$

c/ Identifier alors les isométries g.

Exercice n°4 : (7 pts)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$)

1/ a/ Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2+1})^3}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2/ a/ Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b/ Soit $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x-1)$

Dresser le tableau de variation de g sur \mathbb{R} .

c/ Calculer $g(0)$. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

En déduire les positions relatives de (C) et T. Conclure.

3/ Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

4/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $] -1, 0[$.

5/ Préciser les asymptotes de (C). Tracer (C), T et (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

6/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

BON TRAVAIL