Exercice n°1 : (2 pts)

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1/ si f est une isométrie qui fixe deux points distincts alors $f = S_{(AB)}$.

2/ Soient Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 trois droites strictement parallèles. L'isométrie $f = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_3}$ est une symétrie glissante

3/ Soit f la fonction définie sur $[0\,;\pi]$ par $f(x) = \cos x$ alors $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

4/ La courbe représentative dans un repère du plan de la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^5 + x^4 - 2x + 1$ possède deux points d'inflexion.

Exercice n°2 : (6pts)

1/ a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 4 = 0$

b/ Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

2/ On pose $u = \frac{1}{2}\left[(1-i) + \sqrt{3}(1+i)\right]$

a/ Calculer u^2.

b/ Déterminer la forme trigonométrique de u.

c/ En déduire alors les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3/ Soit l'équation $(E) : z^3 - 2\left(\sqrt{3}+i\right)z^2 + 4\left(1+i\sqrt{3}\right)z - 8i = 0$

a/ Vérifier que $z_0 = 2i$ est une solution de l'équation (E) .

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

4/ Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A, B, C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} - i$; $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2i$

a/ Représenter les points A, B et C.

b/ Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

Exercice n°3 : (5 pts)

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$.

On pose $E = S_A(C)$, $I = S_O(C)$ et $J = S_O(B)$.

I/ 1/ Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, déterminer la droite Δ tel que $t = S_{\Delta} \circ S_{(AJ)}$.

2/ Soit r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $-\frac{2\pi}{3}$.

a/ Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

b/ Déterminer la droite Δ' tel que $r = S_{(AJ)} \circ S_{\Delta'}$ puis identifier alors $t \circ r$.

II/ Soit F le point du plan tel que ABCF est un parallélogramme.

1/ Montrer que le triangle EBF est équilatéral direct de centre A.

2/ Soient $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AB)}$ et R la rotation de centre I d'angle dont une mesure est $-\frac{2\pi}{3}$.

a/ Déterminer $R^{-1} \circ f(A)$ et $R^{-1} \circ f(E)$

b/ Identifier alors $R^{-1} \circ f$.

c/ En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = R(M)$.

3/ Soit g une isométrie tel que $g(E) = C$ et $g(A) = B$, on pose $\varphi = t_{\overrightarrow{BA}} \circ g$.

a/ Déterminer $\varphi(A)$ et $\varphi(E)$.

b/ Montrer que $\varphi = S_{(AB)}$ ou $\varphi = R_{\left(A, -\frac{2\pi}{3}\right)}$

c/ Identifier alors les isométries g.

<u>Exercice n°4 :</u> (7 pts)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\left(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{ cm}\right)$

1/ a/ Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout $x \in \text{IR}$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Montrer que pour tout $x \in \text{IR}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2/ a/ Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b/ Soit $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x-1)$

Dresser le tableau de variation de g sur IR.

c/ Calculer $g(0)$. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

En déduire les positions relatives de (C) et T. Conclure.

3/ Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

4/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1, 0[$.

5/ Préciser les asymptotes de (C) . Tracer (C) , T et (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

6/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

BON TRAVAIL