Lycée : 9 avril 1938	***Devoir de synthèse n°2***	***4 ième Eco et gestion 2 et 4***
Epreuve : Mathématiques		***Durée : 2 Heures***
Le : 12 – 05 – 2017		***Année scolaire : 2016 - 2017***

<u>Exercice n°1 :</u> ***(4 points)***

On considère un graphe G de sommets A, B, C et D dont la matrice associée est :

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

1/ Ce graphe G est-il orienté ? Justifier votre réponse.

2/ a/ Le graphe G admet-il un cycle orienté Eulérien ?

b/ Justifier que G admet une chaîne orientée Eulérienne.

c/ Représenter G et donner un exemple d'une chaine orientée Eulérienne.

3/ On donne $M^3=\begin{pmatrix}2&1&0&3\\1&1&3&1\\2&0&2&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$

a/ Existe-t-il de chaînes orientées de longueur 3 reliant le sommet A au sommet C ? Justifier

b/ Déterminer la nombre de chaînes orientées de longueur 3 reliant B à C.

b/ Donner toutes les chaînes orientées de longueur 3 reliant B à C.

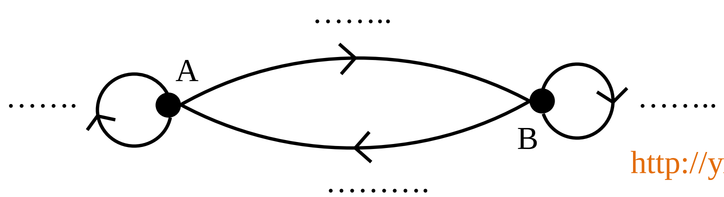
<u>Exercice n°2 :</u> ***(5 points)***

Le propriétaire d'une salle de sport propose deux formules A et B d'adhérence. Une personne désirant rejoindre cette salle de sport choisit une seule de ces deux formules.

Au bout d'une saison, chaque adhérent peut garder la même formule ou changer de formule la saison suivante.

La probabilité qu'un adhérent à la formule A change de formule, vers la formule B la saison suivante est égale à $0,25$.

Le graphe G ci-contre est le graphe probabiliste décrivant l'évolution du choix de l'adhérent d'une saison à l'autre.



Soit $M=\begin{pmatrix}0,75&0,25\\0,4&0,6\end{pmatrix}$ la matrice de transition associée au graphe G.

1/ Recopier et compléter le graphe G.

2/ Donner :

a/ La probabilité qu'un adhérent à la formule B garde la même formule B la saison suivante.

b/ La probabilité qu'un adhérent à la formule B change de formule, vers la formule A, la saison suivante.

3/ Soit $P_0=\begin{pmatrix}0,2&0,8\end{pmatrix}$ la matrice ligne qui décrit l'état initial.

Donner la matrice ligne P_1 décrivant l'état probabiliste après une saison.

4/ Montrer que $P=\begin{pmatrix}\frac{8}{13}&\frac{5}{13}\end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

<u>Exercice n°3 :</u> ***(3 points)***

Une urne contient 8 boules indiscernables au touché, trois blanches et 4 vertes et une rouge.

On tire simultanément trois boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire égale ***au nombre de couleurs des boules tirées***.

1/ Montrer que $p(X=1)=\frac{5}{56}$.

2/ Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X.

x_i	1		
$p(X=x_i)$	$\frac{5}{56}$		

3/ Calculer $E(x)$ et $\sigma(X)$.

<u>Exercice n°4 :</u> ***(5 points)***

On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$ pour tout $n\in$ IN.

1/ a/ Montrer par récurrence que pour tout $n\in$ IN on a : $u_n\leq 2$.

b/ Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c/ En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite ℓ.

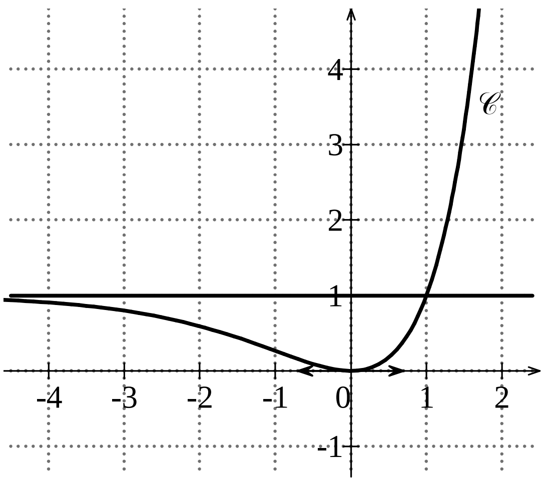
2/ On considère la suite (v_n) définie sur IN par $v_n=2u_n-4$

a/ Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b/ Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c/ Calculer la limite de la suite (v_n), puis retrouver la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice n°5 :</u> ***(3 points)***



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est celle d'une fonction f définie et dérivable sur IR.

- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale à l'origine.
- $\mathscr{C}$ admet au voisinage de voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.
- La droite d'équation $y=1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

1/ Par lecture graphique :

a/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

2/ On admet que l'expression de f est $f(x)=(x-1)e^x+1$

a/ Montrer que la fonction F définie sur IR par $F(x)=(x-2)e^x+x$ est une primitive sur IR de f.

b/ Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.