Lycée : Aguereb2	***Devoir de synthèse N°2***	***Mr Rekik Sabeur***
Le : 04 / 02 / 2015	***Classe : 4ième Sc Exp 2***	***Durée 3h***

Exercice n°1 : (2 points)

I/ Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1/ $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx =$

a/ 0 b/ $2\int_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^2} dx$ c/ -1

2/ Soit $f(x) = \cos x$. La valeur moyenne de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est

a/ $\frac{\pi}{2}$ b/ $\frac{2}{\pi}$ c/ 1

II/ Répondre par vrai ou faux en justifiant

a/ Si F est une primitive de f sur IR alors la fonction $x \mapsto F(-x)$ est une primitive de $x \mapsto f(-x)$ sur IR.

b/ Soit F la fonction définie sur IR par $F(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ alors $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 1$.

Exercice n°2 : (6 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \tan x$.

1/ a/ Etudier les variations de f.

b/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,1]$.

c/ Déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$.

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR et que pour tout $x \in IR$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

3/ a/ Calculer $I = \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1} dx$

b/ En déduire que $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$

B/ On considère la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$ et $u_n = \int_{0}^{1} \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt$; $n \in IN^*$

1/ a/ Vérifier que pour tout $n \in IN$, $0 \le u_n \le \frac{1}{1+2n}$

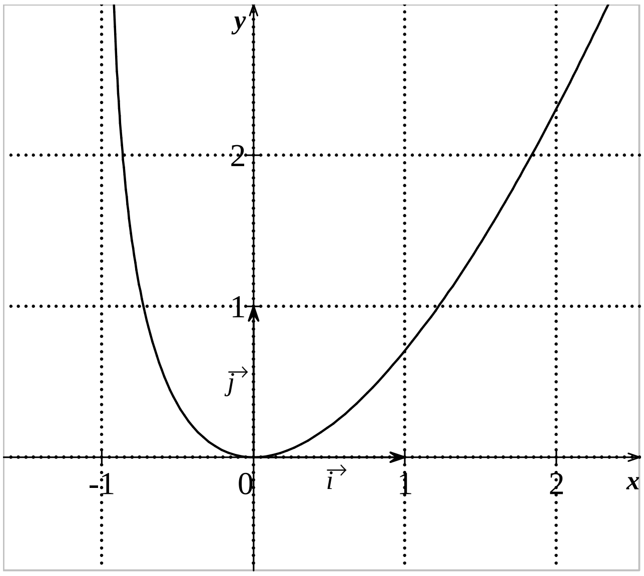
b/ En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2/ a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{1+2n}$

b/ Calculer u_1 et u_2.

Exercice n°3 : (4 points)

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$



1/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 0 et x = 1 (on utilisera deux intégrations par parties).

2/ Soit h la fonction définie sur $]-\pi,\pi[$ par

$$h(x)=\int_0^{\cos x} f(t)\,dt$$

a/ Montrer que h est dérivable sur $]-\pi,\pi[$.

b/ Calculer $h'(x)$ pour tout $x\in\,]-\pi,\pi[$.

c/ Donner le sens de variations de h.

Exercice n°4 : (3 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit S l'ensemble des point $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1/ Montrer que S est une sphère de centre $I(0,2,-1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

2/ Donner l'équation cartésienne du plan Q passant par $A(1,3,-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

3/ Montrer que le plan Q coupe S suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°5 : (5 points)

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(1,2,-2)$, $B(0,3,-3)$ et $C(1,1,-2)$ et le plan P d'équation cartésienne $x+y-3=0$.

1/ a/ Calculer la distance du point $I(0,1,-1)$ et le plan P.

b/ En déduire que l'équation cartésienne de la sphère S de centre I et tangente au plan P est $S: x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$

2/ a/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ puis déduire que les points A, B et C non alignés.

b/ Montrer que l'équation cartésienne du plan (ABC) est : $x-z-3=0$

3/ a/ Vérifier que la sphère S est tangente au plan (ABC).

b/ Calculer la distance IC puis déduire les coordonnées du point d'intersection de S et du plan (ABC).

BON TRAVAIL