Lycée : 9 avril 1938	***Devoir de synthèse n°2***	Classes : 4ème Sc Exp 1+2
◈◈◈◈◈	Le : 06 – 03 – 2019	Durée : 3 heures

Le sujet comporte trois pages

Exercice n°1 : *(5 points)*

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points $A(1,3,2)$, $B(1,-1,-2)$ et $C(2,4,1)$.

http://ymaths.e-monsite.com/

1/ a/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b/ Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

c/ Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $2x-y+z-1=0$

2/ a/ Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre OABC.

b/ Déduire la distance du point O au plan P.

3/ Soit S l'ensemble des point $M(x,y,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-6x-2z-4=0$

a/ Montrer que S est une sphère de centre $I(3,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{14}$.

b/ Montrer que le plan P coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera son centre H et son rayon r.

c/ Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Exercice n°2 : *(6 points)*

Dans l'annexe 1 (voir page 3), on a tracé la courbe (C) d'une fonction f continue sur $[0,\sqrt{2}]$.

La courbe (C) admet une demi-tangente au point d'abscisse 0 avec $A(0,-\sqrt{2})$ et $T(\sqrt{2},0)$.

A/ 1/ Par une lecture graphique :

a/ Déterminer : $\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-}\dfrac{f(x)-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}$ et $f'_d(0)$

b/ Justifier que f réalise une bijection de $[0,\sqrt{2}]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2/ a/ Tracer la courbe (C') de f^{-1} sur le même repère que (C).

b/ Hachurer sur l'annexe le domaine du plan dont l'aire est $\mathcal{A}=\int_{-\sqrt{2}}^{0}f^{-1}(t)\,dt$ ua.

B/ En fait la fonction f est la fonction définie sur $[0,\sqrt{2}]$ par $f(x)=x-\sqrt{2-x^2}$.

Soit F la fonction définie sur $[0,\sqrt{2}]$ par : $F(x)=\int_0^x\sqrt{2-t^2}\,dt$

1/ Montrer que F est dérivable sur $[0,\sqrt{2}]$ et calculer $F'(x)$

2/ Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $G(x)=F(\sqrt{2}\sin x)$

a/ Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et que $G'(x)=1+\cos(2x)$.

b/ Calculer $G(0)$ et en déduire que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$: $G(x)=x+\dfrac{1}{2}\sin(2x)$

c/ Calculer $F(1)$ et en déduire que $\int_0^1 f(x)\,dx=-\dfrac{\pi}{4}$

d/ Prouver alors que $\int_{-\sqrt{2}}^{0}f^{-1}(t)dt=\dfrac{\pi}{4}$

http://ymaths.e-monsite.com/

Exercice n°3 : *(5 points)*

1/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$

a/ Dresser le tableau de variation de g.

b/ Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g.

http://ymaths.e-monsite.com/

2/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\ln x$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b/ Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=g(x)$

c/ Dresser le tableau de variation de f.

d/ Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère de l'annexe 2 (voir page 3).

3/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (Utiliser une intégration par parties)

Exercice n°4 : *(4 points)*

Pour tout $n\in IN^*$, on pose $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\,dt$

1/ a/ Montrer que $I_1=\frac{\ln 2}{2}$

b/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$ et en déduire I_3.

2/ a/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$ et pour tout $t\in[0,1]$: $\frac{t^n}{2}\le\frac{t^n}{1+t^2}\le t^n$

b/ En déduire que $\frac{1}{2n+2}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3/ On pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ où $n\in IN^*$.

a/ Vérifier que pour tout $n\in IN^*$: $I_{2n+1}+I_{2n+3}=\frac{1}{2n+2}$

b/ Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN^*$: $u_n+2(-1)^n I_{2n+1}=\ln 2$

c/ Vérifier que pour tout $n\in IN^*$: $|u_n-\ln 2|\le\frac{2}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

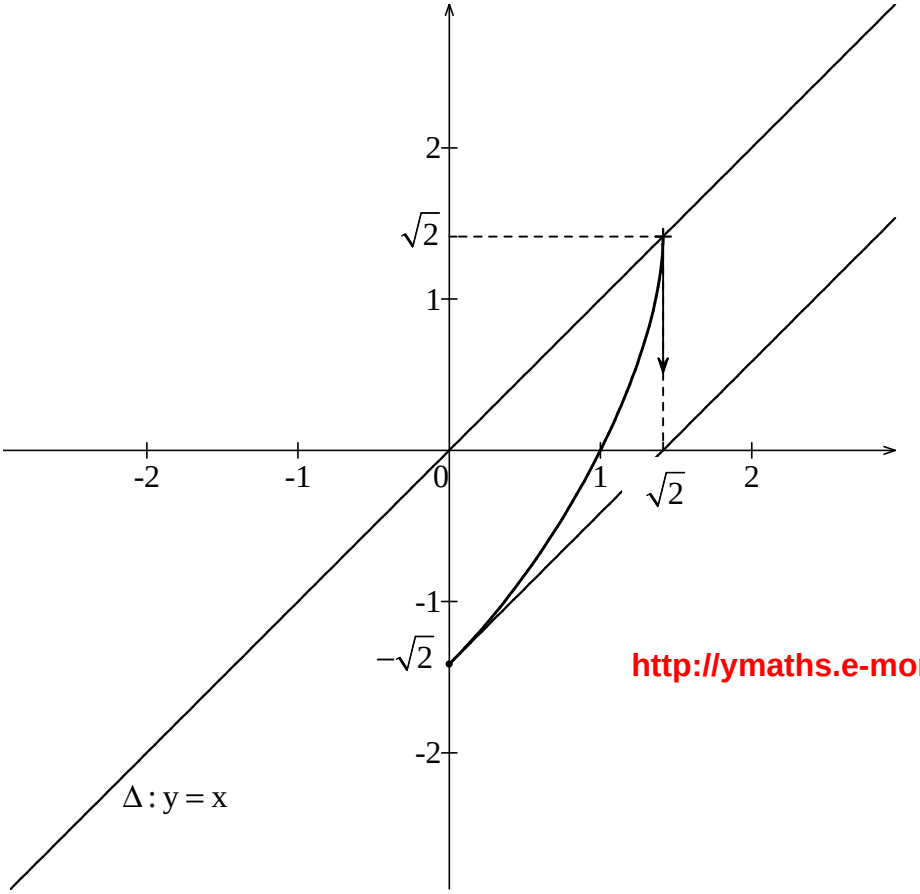
http://ymaths.e-monsite.com/

Lycée : 9 avril 1938	***Devoir de synthèse n°1***	Classes : 4ème Sc Exp 1+2
◈◈◈◈◈	Le : 06 – 03 – 2019	Durée : 3 heures

Annexe à rendre avec la copie

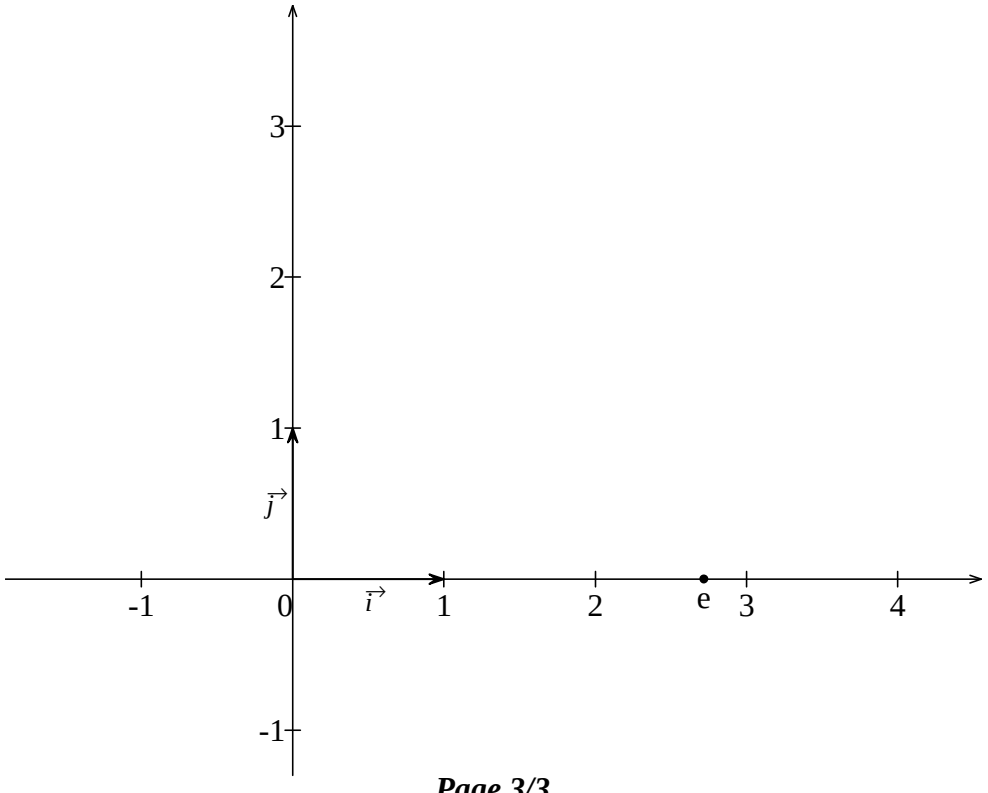
Nom : ……. ***Prénom :*** …….. ***Classe :*** ……..

Annexe 1 :



http://ymaths.e-monsite.com/

Annexe 2 :



http://ymaths.e-monsite.com/