Lycée : Aguereb 2	Devoir de synthèse n°2	4 ième Mathématiques
Prof : Mr Rekik Sabeur	Epreuve : Mathématiques	Durée : 4 Heures
	Le : 05 – 03 – 2013	Année scolaire : 2012 - 2013

Le sujet comporte 4 pages

Exercice n°1: (2 pts)

I/ Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1/ La limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto x\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)$ est :

a/ $+\infty$ b/ -2 c/ 2

2/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La parabole de foyer $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ et de directrice $D : x = -\frac{1}{2}$ a pour équation :

a/ $y^2 = 2x$ b/ $y^2 = x$ c/ $y^2 = -2x$

II/ Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1/ $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx = \frac{1}{4}$

2/ Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

La similitude indirecte qui au point $M(z)$ associe la point $M'(z')$ tel que $z' = (1-i)\overline{z}+1$ a pour centre le point Ω d'affixe $(2+i)$

Exercice n°2 : (5 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ Soit $(\mathcal{P})$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $x^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

a/ Ecrire l'équation réduite de $(\mathcal{P})$.

b/ En déduire que $(\mathcal{P})$ est une parabole dont on précisera le foyer F et la directrice D.

2/ Soit $A(3,1)$.

a/ Vérifier que $A \in (\mathcal{P})$ et écrire une équation cartésienne de la tangente T à $(\mathcal{P})$ en A.

b/ Tracer $(\mathcal{P})$ et T.

c/ Soit A' le projeté orthogonal de A sur D. La droite T coupe l'axe focal de $(\mathcal{P})$ en B.

Montrer que les droites (AF) et (BA') sont parallèles.

3/ Soit Δ la droite d'équation $x = 1$. $M(x,y)$ un point du plan.

On note H et K les projetés orthogonaux respectives de M sur Δ et sur $\left(O,\vec{i}\right)$

Soit $(\mathcal{H})$ l'ensemble des points M tels que $MH^2 - 2MK^2 = 2$

a/ Montrer que $M \in (\mathcal{H})$ si et seulement si : $\frac{(x-1)^2}{2} - y^2 = 1$

b/ En déduire que $(\mathcal{H})$ est une hyperbole dont on précisera le centre.

c/ Montrer que T est tangente à $(\mathcal{H})$ en A.

d/ Déterminer les sommets et les asymptotes de $(\mathcal{H})$ puis tracer $(\mathcal{H})$ dans le même repère.

4/ Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathcal{H})$ et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$ et S le solide obtenu par rotation de $\mathcal{A}$ autour de l'axe $(O, \vec{i})$. Calculer le volume $\mathcal{V}$ de S.

Exercice n°3: (7 pts)

Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1/ a/ Etudier les variations de g sur $[1, +\infty[$.

b/ En déduire le signe de $g(x)$ sur $[1, +\infty[$.

2/ Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a/ Vérifier que f est bien définie sur $[1, +\infty[$.

b/ Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{x - 1} = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c/ Dresser le tableau de variation de f.

d/ Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère sur annexe page 4

3/ a/ Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} ; f^{-1} étant la fonction réciproque de f

c/ Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère.

d/ Montrer que $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ pour tout x de J.

4/ Soit F la fonction définie sur J par $F(x) = \int_1^{f^{-1}(x)} \sqrt{t^2 - 1}\, dt$

a/ Montrer que F est dérivable sur J.

b/ Montrer que pour tout x de J ; $F'(x) = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x} - 2\right)$

c/ En déduire l'expression de $F(x)$ pour tout x de J.

d/ Résoudre dans J l'équation $f^{-1}(x) = \dfrac{5}{4}$, en déduire $\int_1^{\frac{5}{4}} \sqrt{t^2 - 1}\, dt$

Exercice n°4 : (6 pts)

Pour tout entier naturel n, on considère les fonctions f_n définies sur IR par $f_n(x) = \dfrac{e^{(1-n)x}}{1 + e^x}$

A/ (C_0) et (C_1) sont les courbes représentatives respectivement de f_0 et de f_1 dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(C_0) est donnée sur l'annexe jointe.

1/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

2/ Dresser le tableau de variation de f_0

3/ Ecrire l'équation de la tangente T à (C_0) au point I d'abscisse 0.

4/ Montrer que pour tout réel x, $f_1(-x) = f_0(x)$

Par quelle transformation simple (C_1) est-elle l'image de (C_0)

Construire alors (C_1) dans le même repère.

B/ 1/ a/ Calculer $\int_0^{\alpha} f_0(x)\,dx$ où $\alpha \in IR_+$

b/ Vérifier que pour tout $x \in IR$, $f_1(x) + f_0(x) = 1$ et en déduire que $\int_0^{\alpha} f_1(x)\,dx = Ln\left(\frac{2e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}\right)$

c/ En déduire, en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

d/ Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ quand α tend vers $+\infty$.

2/ Pour tout entier naturel n on pose $U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

a/ Calculer U_0 et U_1

b/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n}\left(\frac{e^n - 1}{e^n}\right)$

En déduire la limite de $(U_{n+1} + U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c/ Montrer que pour tout $x \in [0,1]$; $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$

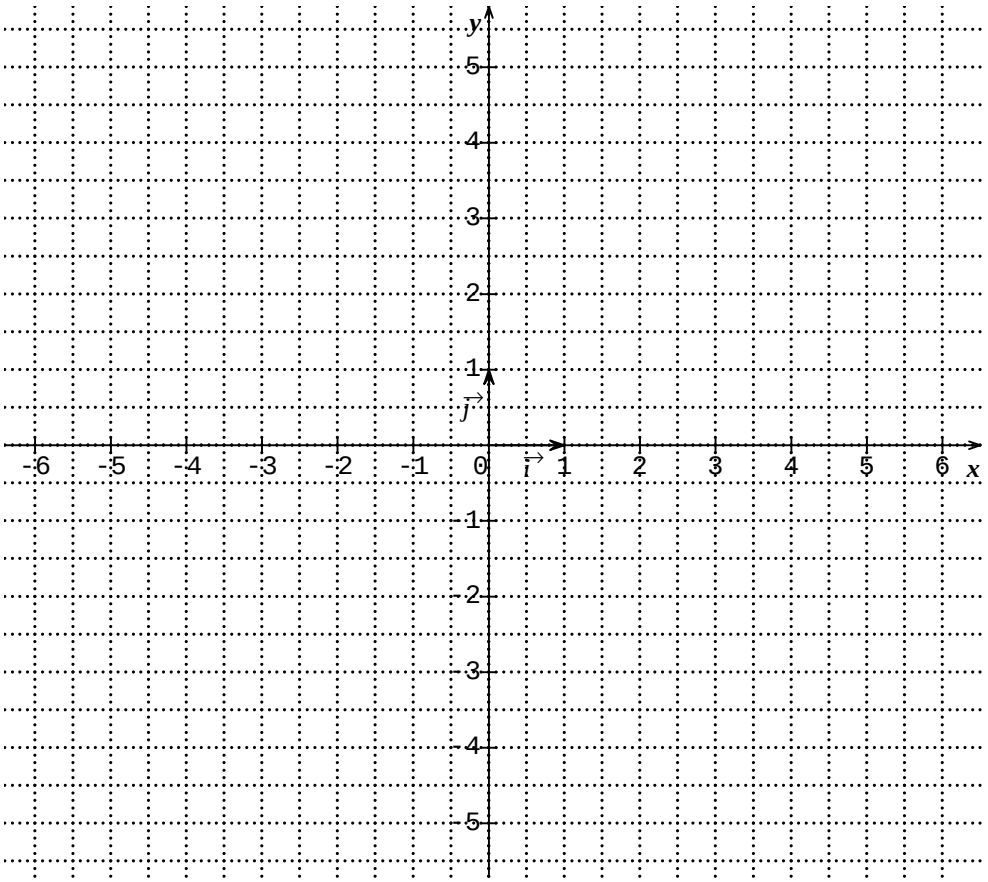
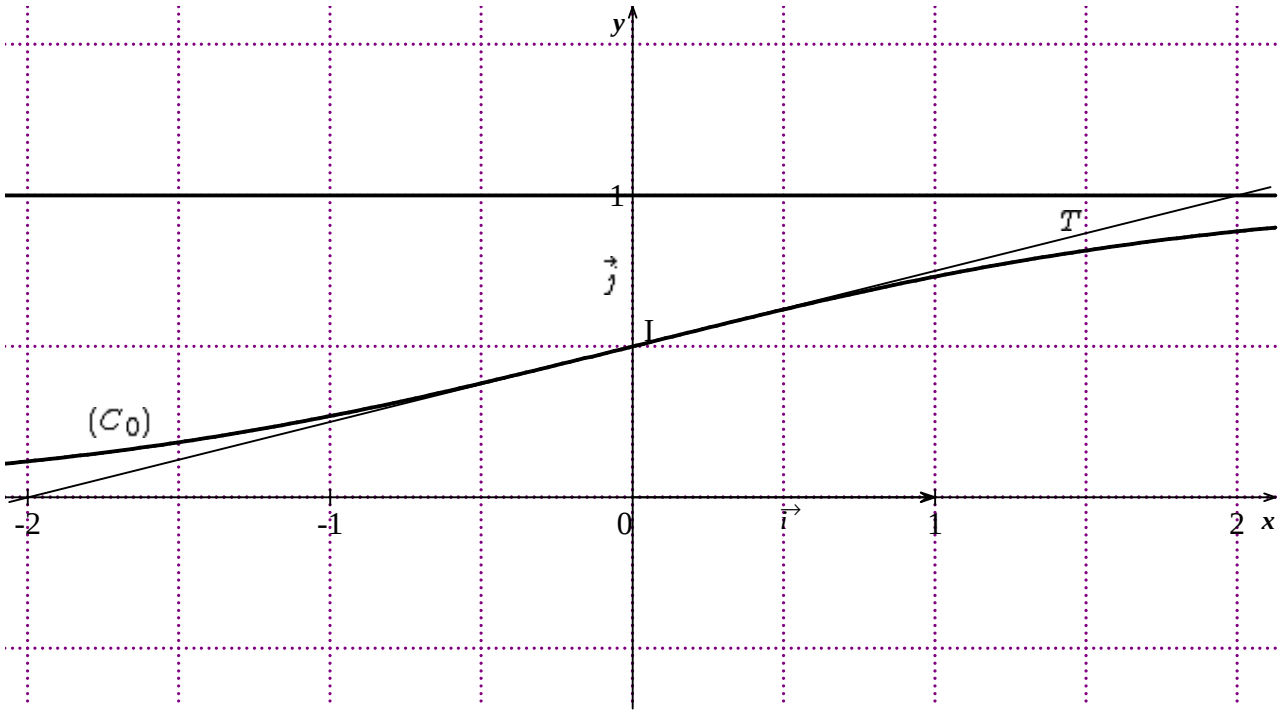
En déduire le sens de variation de la suite (U_n) puis sa limite.

http://ymaths.e-monsite.com/

Feuille à rendre avec la copie

Nom et prénom : …… Classe : ……

Annexe : exercice n°3



Annexe : exercice n°4