

République Tunisienne Ministère de l'éducation et de la formation	Devoir de synthèse n°3	4^{ème} Sc Exp 2
Lycée : Agureb 2	Epreuve : Mathématiques	Durée : 3 Heures
Prof : Mr Rekik Sabeur	Le : 08 – 05 – 2015	Année scolaire : 2014 - 2015

Le sujet comporte 3 pages

Exercice n°1 : (3 points)

<http://ymaths.e-monsite.com/>

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1/ La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ telle que $f(0) = 1$ est définie sur \mathbb{R} par :

a/ $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ b/ $f(x) = -2e^{2x} + 3$ c/ $f(x) = -2e^{-2x} - 3$

2/ Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre 8 et $\frac{1}{4}$ alors son espérance mathématique $E(x)$ est égale à :

a/ 2 b/ $\sqrt{2}$ c/ $\frac{3}{2}$

3/ P est la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors $P(0,2 \leq X \leq 0,92)$ est égale à :

a/ 0,7 b/ 0,72 c/ 0,9

Exercice n°2 : (4 points)

Dans cet exercice les calculs seront effectués à 10^{-3} près.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du pourcentage des logiciels pirates en Tunisie de 2000 à 2008. On désigne par X le rang de l'année et par Y le pourcentage.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pourcentage Y	85	78	73	66	57	51	47	44	43

1/ Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X, Y) dans un repère orthogonal. (On prendra 1 carreau pour $X = 1$ et 1 carreau pour $Y = 10$).

2/ Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage, le placer dans le repère précédent.

3/ a/ Calculer le coefficient de corrélation r de cette série statistique. Interpréter le résultat obtenu.

b/ Donner une équation de la droite de régression D de Y en X . Tracer D .

c/ En supposant que l'évolution se poursuivre de la même façon les années suivantes, donner une estimation du pourcentage des logiciels pirates en l'an 2014.

4/ Les experts modélisent cette évolution du pourcentage des logiciels pirates en posant $Z = \ln Y$.

a/ Dresser le tableau statistique qui représente la série (X, Z) .

b/ Donner une équation de la droite de régression de Z en X et en déduire l'expression de Y en fonction de X .

c/ En déduire une nouvelle prévision du pourcentage des logiciels pirates en l'an 2014.

Exercice n°3 : (4 points)

A/ Une entreprise dispose de trois machines M_1 , M_2 et M_3 pour fabriquer des composants électroniques.

La machine M_1 fabrique 30% de la production, la machine M_2 fabrique 50% de la production et la machine M_3 fabrique le reste.

5% des composants fabriqués par M_1 présentent un défaut, 3% des composants fabriqués par M_2 présentent un défaut et 4% des composants fabriqués par M_3 présentent un défaut.

On désigne par : M_1 l'événement : « le composant est fabriqué par la machine M_1 »

M_2 l'événement : « le composant est fabriqué par la machine M_2 »

M_3 l'événement : « le composant est fabriqué par la machine M_3 »

D l'événement : « le composant présente un défaut »

1/ a/ Représenter un arbre de probabilité qui résume la situation.

b/ Montrer que $p(D) = 0,038$.

c/ Sachant que le composant présente un défaut, calculer la probabilité qu'il soit fabriqué par M_1 .

2/ On considère un lot de 8 composants et on suppose que le stock de l'entreprise est suffisamment grand pour l'assimiler à un tirage successif avec remise.

Calculer la probabilité qu'au moins un composant de ce lot présente un défaut.

B/ La durée de vie en années d'un composant présentant un défaut suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0,5$ et la durée de vie en années d'un composant ne présentant aucun défaut suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 0,125$.

On choisit un composant au hasard de cette entreprise et on désigne par X la variable aléatoire indiquant la durée de vie de ce composant.

1/ Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « le composant présente un défaut et il est en état de marche depuis 10 ans »

B : « le composant est en état de marche depuis 10 ans »

2/ Sachant que le composant est en état de marche depuis 10 ans, quelle est la probabilité qu'il présente un défaut ?

Exercice n°4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-x})$.

1/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) - 2f(x) = \frac{-e^x}{1 + e^{-x}}$

2/ a/ Vérifier que pour tout réel x, $\frac{e^x}{1 + e^{-x}} = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$

b/ Calculer alors $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^{-x}} dx$.

c/ Déduire $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

3/ On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = \frac{-e^x}{1 + e^{-x}}$

a/ Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de (E') : $y' - 2y = 0$.

b/ Résoudre l'équation différentielle (E').

4/ Déterminer la fonction g, solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

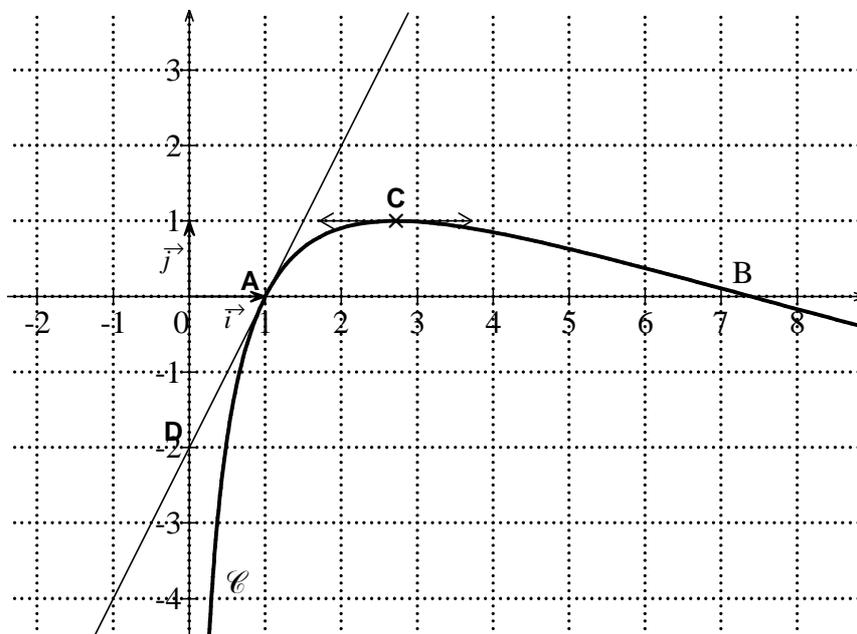
Exercice n°5 : (4 points)<http://ymaths.e-monsite.com/>

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x) \ln x$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La courbe \mathcal{C} coupe l'axe des abscisses en $A(1, 0)$ et en B .

La tangente en C à la courbe \mathcal{C} est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe \mathcal{C} coupe l'axe des ordonnées en D .



1/ Déterminer l'abscisse du point B . (La valeur exacte est demandée)

2/ Calculer la limite de f à droite en 0 et la limite de f en $+\infty$.

3/ a/ Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b/ Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D . (Les valeurs exactes sont demandées).

4/ Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x[f(x) + 2 \ln x - 4]$.

a/ Montrer que g est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

b/ Calculer $\int_1^{e^2} f(x) dx$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

<http://ymaths.e-monsite.com/>