

République Tunisienne Ministère de l'éducation et de la formation	Devoir de synthèse n°3	4^{ème} Mathématiques
Lycée : Aguerb 2	Epreuve : Mathématiques	Durée : 4 Heures 🌟🌟🌟
Prof : Mr Rekik Sabeur	Le : 09 – 05 – 2012	Année scolaire : 2012 - 2013

Le sujet comporte 3 pages et une feuille annexe qui sera rendue avec la copie.

Exercice n°1 : (2 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1/ $\int_{-1}^1 \sin x \cdot e^{-x^2} dx$ est égale :

a/ 2

b/ 0

c/ -2

2/ Une pièce de monnaie est telle que la probabilité d'obtenir le côté face est égale à $\frac{1}{3}$. On lance 4 fois de suite cette pièce. La probabilité d'obtenir au moins une fois le côté face est égale à :

a/ $\frac{18}{81}$

b/ $\frac{72}{81}$

c/ $\frac{65}{81}$

3/ La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$. La probabilité que la composante électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est égale à :

a/ $1 - \frac{1}{e}$

b/ $\frac{1}{e}$

c/ $\frac{1}{0,2}(e-1)$

4/ Soit une série statistique à deux variables (x, y) .

Les valeurs de x sont 1, 2, 5, 7, 11, 13 et une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est $y = 1,35x + 22,8$. Les coordonnées du point moyen est :

a/ (6,5; 30,575)

b/ (32,575; 6,5)

c/ (6,5; 31,575)

Exercice n°2 : (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct. On considère l'ensemble (S) des points

$M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 6 = 0$

1/ Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera les coordonnées du centre I et le rayon.

2/ Soit A(3, 1, 2), B(1, 3, 2) et C(1, -1, -2).

a/ Montrer que ABC est un triangle rectangle en A et calculer son aire.

b/ Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x + y - z - 2 = 0$

3/ Montrer que l'intersection de (S) et du plan (ABC) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

4/ Soit h l'homothétie de centre I et de rapport -2 et le point J(2, 2, -1).

On désigne par A', B', C' et J' les images respectives de A, B, C et J par h.

a/ Calculer le volume du tétraèdre ABCJ et en déduire, en justifiant, celui du tétraèdre A'B'C'J'.

b/ Justifier sans calcul que le volume du tétraèdre A'B'C'J est inférieur à celui de A'B'C'J'.

c/ Calculer maintenant le volume du tétraèdre A'B'C'J.

Exercice n°3 : (4 points)

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1/ Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies.

On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a/ Déterminer la loi de probabilité de X .

b/ Calculer l'espérance mathématique de X .

2/ Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie.

On considère les événements suivants :

C_1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »

C_2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »

R : « L'enfant prend une bille rouge »

V : « L'enfant prend une bille verte »

a/ Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b/ Calculer la probabilité de l'événement R .

c/ Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3/ L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a/ Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b/ Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

Exercice n°4 : (3 points)

Dans un magasin, on relève le nombre T de stylos magiques vendus depuis le premier mois de vente.

On donne :

Mois : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre : T_i	103	140	161	299	552	653	997	1842

1/ On pose $y_i = \ln(T_i)$

a/ Recopier et compléter le tableau suivant (on donnera pour y les valeurs arrondies à 10^{-2} près)

Mois : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre : y_i	4,63	4,94						7,52

b/ Représenter le nuage des points $M(x_i, y_i)$ sur la figure 1 de l'annexe.

c/ Calculer les coordonnées du point moyen G puis placer le point G .

2/ a/ Calculer le coefficient de corrélation de (x, y) . Interpréter

b/ Ecrire l'équation de D la droite de régression de y en x et la tracer.

c/ Donner deux réels A et B tels que $T = A e^{Bx}$.

3/ A l'aide de la formule précédente, estimer le nombre de stylos vendues à la fin de la première année.

Exercice n°5 : (7 points)

A/ On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et g la fonction définie par $f(x) = e^{-x} g(x)$

1/ Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et de $g'(x)$.

2/ Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

3/ En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$

B/ On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1/ Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$

a/ Calculer $h'(x)$ et montrer que $h'(x) \leq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

b/ Dresser le tableau de variation de h .

c/ En déduire le signe de $h(x)$, pour tout x de $[0, +\infty[$.

2/ Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x} h(e^x)$

3/ a/ On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$; déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b/ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^{-x})$. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4/ Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5/ Construire, sur la figure 2 de l'annexe, la courbe (C).

C/ 1/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

a/ Montrer que : $F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2 \ln 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

2/ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Montrer que l'on a : $f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$ pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$.

b/ Comparer u_n et $F(n)$.

c/ La suite (u_n) est elle convergente ?

BON TRAVAIL

Feuille annexe à rendes avec la copie

Nom et prénom : **N° :**

Figure 1

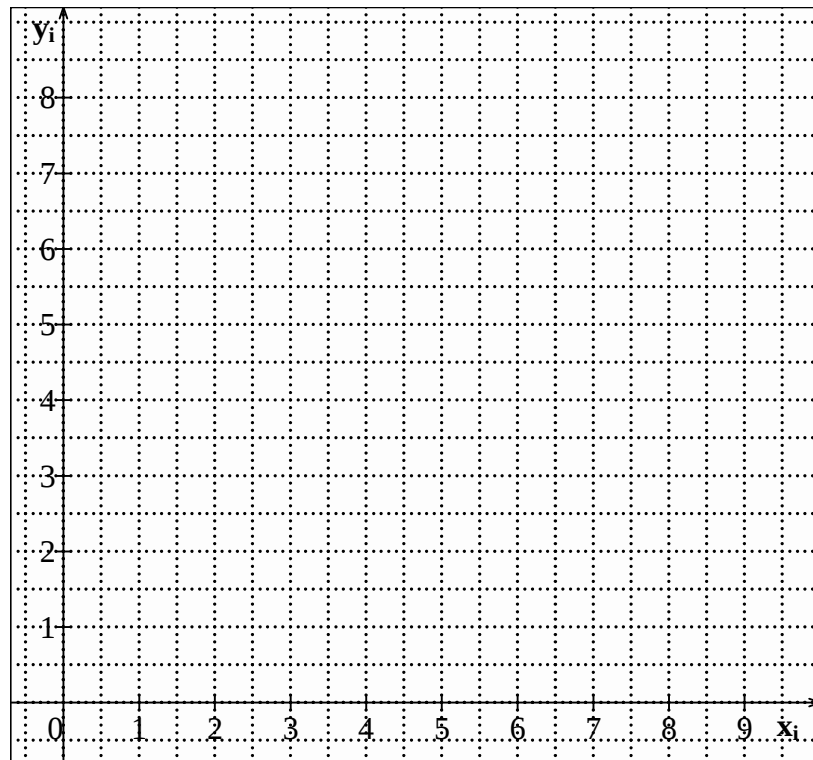


Figure 2

