Exercice n°1 :

<http://ymaths.e-monsite.com/>

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 4iz - 4(1+i) = 0$

1/ a/ Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $\left[2\sqrt{2}(1+i)\right]^2$.

b/ Résoudre l'équation (E). On notera z_1 , la solution tel que $\operatorname{Re}(z_1) > 0$, z_2 , l'autre solution.

2/ On pose $a = 2i$ et $b = \sqrt{2}(1+i)$.

a/ Vérifier que $z_1 = a + b$ et $z_2 = a - b$

b/ Ecrire a et b sous forme trigonométrique.

3/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par $A(a)$; $B(b)$ et $C(z_1)$

a/ Placer les points A, B et C et vérifier que : $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ et que $OA = OB$

b/ Dédire que OBCA est un losange puis que $\arg(z_1) = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice n°2 :

1/ a/ Mettre $-1+i$ et $-2i$ sous forme exponentielle.

b/ En déduire les racines carrées de $-1+i$ et de $-2i$ sous forme exponentielle.

c/ Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $(1-3i)^2$.

d/ Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^4 + (1+i)z^2 + 2 + 2i = 0$

On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

2/ On considère l'équation (E) : $z^3 = 2 + 2i$ et les nombres complexes $z_0 = -1+i$ et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

a/ Calculer z_0^3 et j^3 .

b/ Vérifier que les trois nombres complexes z_0 , $z_1 = jz_0$ et $z_2 = j^2z_0$ sont les solutions de l'équation (E).

<http://ymaths.e-monsite.com/>

c/ Ecrire sous forme trigonométrique z_0 et j .

d/ En déduire la forme trigonométrique de z_1 et z_2 .

Exercice n°3 :

1/ a/ Ecrire -1 et $1+i$ sous la forme trigonométrique.

b/ Déterminer les racines cubiques de -1 et les racines cubiques de $1+i$.

c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$

2/ Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3 + (-1+2i)z^2 - (3+3i)z + 2 - 2i = 0$

a/ Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b/ Déterminer deux complexes b et c vérifiant :

$$z^3 + (-1+2i)z^2 - (3+3i)z + 2 - 2i = (z+i)(z^2 + bz + c)$$

c/ Achever la résolution de l'équation (E).

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on donne les points A et B d'affixes

$$z_A = -i \text{ et } z_B = -1 - i$$

Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = 2iz - 3 + i$.

a/ Déterminer l'affixe du point A' image de A par f . Vérifier que AA'B est un triangle rectangle.

b/ Montrer que $\frac{z' - z_B}{z - z_B} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. En déduire la nature du triangle BMM'.