Exercice n°1 :

1/ a/ Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $(1-5i)^2$.

b/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+2(1+3i)z+16(1+i)=0$

c/ Ecrire sous la forme trigonométrique les solutions de (E).

2/ a/ Déterminer sous la forme trigonométrique les racines cubiques de $-2+2i$.

b/ Déterminer sous la forme trigonométrique les racines cubiques de $-8i$.

c/ Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E'): z^6+2(1+3i)z^3+16(1+i)=0$

Exercice n°2 :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-2(i+\sin\theta)z+2i\sin\theta=0$ avec $\theta\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

1/ a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b/ Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

2/ Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, M et N d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=\sin\theta+i(1+\cos\theta)$ et $z_C=\sin\theta+i(1-\cos\theta)$

a/ Montrer que pour tout $\theta\in\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : AM = AN = 1

b/ Pour quelle valeur de θ le triangle AMN est rectangle isocèle en A.

Exercice n°3 :

Soit θ un réel de $]0\,,\pi[$. On considère l'équation, dans $\mathbb{C}$: $E_\theta: z^2+i(\sin\theta)z - \frac{1}{2}\left(1+e^{i2\theta}\right)=0$

1/ a/ Vérifier que : $\left(\frac{e^{-i\theta}+3e^{i\theta}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)^2=2\left(1+e^{i2\theta}\right)$

b/ Résoudre l'équation E_θ.

2/ P est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $A(1)$, $B(\cos\theta)$, $C(i\sin\theta)$ et $M\left(-e^{i\theta}\right)$

a/ Donner le module et un argument du nombre complexe $e^{i\theta}\left(1+e^{i\theta}\right)$

b/ Déterminer θ pour que $\overrightarrow{BC}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AM}$.

c/ Déterminer θ pour que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.

Exercice n°4 :

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): 2z^2-\sqrt{2}(1-i)z-2i=0$

1/ a/ Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.

b/ Résoudre l'équation (E) .

2/ a/ Donner l'écriture exponentielle de $1-i$.

b/ Vérifier que pour tout nombre complexe z : $2\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)^2-\sqrt{2}(1-i)\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}z\right)-2i=-2i\left(z^2-z+1\right)$

c/ Montrer que les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$

d/ En déduire une écriture exponentielle de chacun des solutions de l'équation (E) .

e/ Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice n°5 :

1/ Calculer $(1-i)^2$, puis résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3+3i)z + 5i = 0$

2/ Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^3 - (4+3i)z^2 + (3+8i)z - 5i = 0$

a/ Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

b/ Trouver deux complexes b et c vérifiant $f(z) = (z-1)(z^2 + bz + c)$

c/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$.

Exercice n°6 :

1/ Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(2i+1)z - 4i = 0$

Vérifier que $2i$ est une solution de (E) et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation.

2/ Soit l'équation $(E'): z^2 - 2z + 1 - e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in]0, \pi[$

a/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') on notera z_1 , la solution tel que $\text{im}(z_1) > 0$, z_2, l'autre solution.

b/ Vérifier que $z_1 = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -2i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

3/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On donne $M_1(1+e^{i\theta})$, $M_2(1-e^{i\theta})$ et $A(2)$

a/ Montrer que OM_1AM_2 est un parallélogramme.

b/ Déterminer θ pour que OM_1AM_2 soit un losange.

http://ymaths.e-monsite.com/