Exercice n°1 :

Soit $\theta \in [0,\pi]$; on considère l'équation (E) : $z^2-(1+i)\left(e^{i\theta}+i\right)z+i\left(e^{i\theta}+i\right)^2=0$

1. a. Vérifie que $(1-i)^2=-2i$

   b. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$; on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}+i$ et $z_2=ie^{i\theta}-1$

   a. Vérifier que $z_2=iz_1$

   b. Montrer que $e^{i\alpha}+e^{i\beta}=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$; α et β deux réels.

   c. Donner la forme exponentielle de z_1 puis de z_2.

3. Montrer que $M_1M_2^2=4(1+\sin\theta)$

Exercice n°2 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.Soit A le point d'affixe (- i).

On considère l'application f : P \ $\{A\}\rightarrow$ P , M(z) $\mapsto$ M' (z') tel que : z' = $\dfrac{i\bar{z}}{i-\bar{z}}$

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
2. a. Montrer que pour tout $z\in C\backslash\{-i\}, (z'+i)(\bar{z}-i)=1$

   b. En déduire que AM'.AM = 1 et que M' $\in$ [AM)

3. a. Soit $\theta \in IR\backslash\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z\right\}$.

   Montrer que l'affixe de f(M) est égale à $e^{i\theta} \Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\right)$

   b. Résoudre dans C l'équation $z^3=1$ et en déduire les solutions de l'équation : $iz^3=(-i-z)^3$

Exercice n°3 :

1. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2\sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta = 0$, avec $\theta \in]0,\pi[$.
   Déterminer les solutions z_1 et z_2 de (E) et mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Soit $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ un repère orthonormé direct du plan complexe, on considère les points M' et M'' d'affixes respectives : z' = $1+\cos\theta+i\sin\theta$ et z'' $=1-\cos\theta-i\sin\theta$ avec $\theta\in]0,\pi[$.

   a. Calculer $\dfrac{z''}{z'}$ et en déduire que le triangle OM' M'' est un triangle rectangle.

   b. Déterminer θ pour que OM'M'' soit isocèle.

   c. Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$ le point M' varie sur un cercle qu'on précisera.

Exercice n°4 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - 1 - e^{2i\theta}=0$, avec $\theta \in]0,\pi[$.
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère les Points A, M et N d'affixes respectives -1 + i, i + $e^{i\theta}$ et i - $e^{i\theta}$ où $\theta\in]0,\pi[$.

   a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux.

   b. Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$ les points M et N varient sur un cercle $\mathscr{C}$ que l'on déterminera.

3. a. Déterminer en fonction de θ l'aire $A(\theta)$ du triangle AMN.

   b. Déterminer θ pour que $A(\theta)$ soit maximale et placer dans ce cas les points M et N sur le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice n°4 :

1. a. Déterminer les racines cubiques de -1 et les racines cubiques de 1+i.

   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6-iz^3-1-i = 0$.

2. Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3+(-1+2i)z^2-(3+3i)z+2-2i=0$

   a. Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.

   b. Déterminer deux complexes b et c vérifiant : $z^3+(-1+2i)z^2-(3+3i)z+2-2i = (z+i)(z^2+bz+c)$

   c. Achever la résolution de l'équation (E).

3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on donne les points A et B d'affixes

   $z_A = -i$ et $z_B = -1-i$

   Soit f l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M'

   d'affixe Z' tel que $Z' = 2iz-3+i$.

   a. Déterminer l'affixe du point A' image de A par f. Vérifier que AA'B est un triangle rectangle.

   b. Montrer que $\dfrac{z'-z_B}{z-z_B} = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$. En déduire la nature du triangle BMM'.

Exercice n°5 :

1- Soit (E) : $z^3-2(1+i)z^2+2(2i+1)z-4i=0,\quad z\in\mathbb{C}$.

Vérifier que 2i est une solution de (E) et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation .

2- Soit (E') : $z^2-2z+1-e^{i2\theta}=0$ où $\theta\in]0,\pi[$.

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') on notera z_1, la solution tel que $\mathrm{im}(z_1)>0$, z_2, l'autre solution.

b- Vérifier que $z_1 = 2\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2 = -2i\sin\dfrac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

3- Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne $M_1(1+e^{i\theta})$, $M_2(1-e^{i\theta})$ et $A(2)$

a- Montrer que OM_1AM_2 est un parallélogramme.

b- Déterminer θ pour que OM_1AM_2 soit un losange.

4- Soit $f: P\setminus\{B\}\to P : M(z)\to M'(z')$ tel que $z'=\dfrac{1+z}{1-z}$ avec B le point d'affixe 1.

a- Montrer que f admet deux points invariants à préciser

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) pour que z' soit imaginaire pur

c- Montrer que si $z'=e^{i\theta}$ alors $z = i\cot\mathrm{an}\dfrac{\theta}{2}$, avec $\theta\in]0,\pi[$.

d- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(1+z)^4=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-z)^4$.