

Exercice n°1 :

1/ Calculer $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

<http://ymaths.e-monsite.com/>

2/ Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[: \frac{1}{2x} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{x}$

3/ En déduire un encadrement de l'intégrale $J = \int_1^e \frac{x \ln x}{1+x^2} dx$

Exercice n°2 :Soit f et g les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 - x - 2 \ln x$ et $g(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2}$

1/ a/ Montrer que la fonction f est dérivable $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

b/ Etudier les variations de f puis déterminer le signe de $f(x)$.2/ a/ Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

b/ Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{f(x)}{x^3}$.

c/ Dresser le tableau de variations de f .**Exercice n°3 :**Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Soit g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

a/ Dresser le tableau de variations de g .b/ Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $] -1, +\infty[$.

2/ a/ Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[: f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$.

b/ Dresser le tableau de variations de f .c/ Montrer que la droite D d'équation $y = -x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.d/ Etudier la position relative de (C) et D .e/ Tracer (C) .3/ Calculer l'aire du domaine du plan du plan limitée par (C) , D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.**Exercice n°4 :**Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$ On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.1/ Déterminer D_f . Calculer les limites de f aux bornes de D_f .2/ Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ de f .3/ Etudier les variations de f .4/ a/ Déterminer la nature des branches infinies de $\mathcal{C}$.b/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.c/ Tracer la courbe $\mathcal{C}$.<http://ymaths.e-monsite.com/>

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x(2 + \ln^2|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. ($\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$)

1/ Montrer que f est paire.

2/ Montrer que f est continue en 0.

3/ Etudier la dérivabilité de f en 0.

4/ Etudier les variations de f .

5/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter le résultat graphiquement.

6/ Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\frac{1}{e}$.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

Exercice n°6 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+2) dx$.

1/ Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ et calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx$.

2/ a/ Calculer I_1 .

b/ Montrer que la suite (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq I_n \leq \frac{\ln 3}{n+1}$ et en déduire la limite de I_n en $+\infty$.

4/ a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{3(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+2} dx \leq \frac{1}{2(n+2)}$.

b/ Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\ln 3}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{\ln 3}{n+1}$.

c/ En déduire la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°7 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x^2} dx$

1/ a/ Montrer que $I_1 = 1 - \frac{2}{e}$

b/ Montrer que (I_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2/ a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [1, e]$ on a : $\frac{\ln^n(x)}{xe} \leq \frac{\ln^n(x)}{x^2} \leq \frac{\ln^n(x)}{x}$

b/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$

c/ En déduire la limite de la suite (I_n) .

3/ a/ Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$

b/ Montrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{n!} I_n = 1 - \frac{1}{e} \cdot \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right)$

c/ En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \right)$

<http://ymaths.e-monsite.com/>