Exercice n°1 :

Donner une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x)=2x^3-6x^2-3x+1$, $I=\mathbb{R}$

2/ $f(x)=\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$, $I=]0,+\infty[$

3/ $f(x)=(x+1)^2-(2x+1)^3$, $I=\mathbb{R}$

4/ $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^4}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$, $I=]-\infty,-1[$

5/ $f(x)=(x-1)(x^2-2x+3)^4$, $I=\mathbb{R}$

6/ $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^3}-\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $I=\mathbb{R}$

7/ $f(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $I=[-2,+\infty[$

8/ $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^5}$, $I=]-1,+\infty[$

9/ $f(x)=\cos^3 x+\sin^3 x$, $I=\mathbb{R}$

10/ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\sqrt{x}\right)$, $I=]0,+\infty[$

Exercice n°2 :

On pose $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-4x+7}{(x-2)^2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

1/ Déterminer les réels a, b et c pour que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x-2)^2}$

2/ a/ Montrer que f admet des primitives sur $]2,+\infty[$

b/ Déterminer la primitive F de f sur $]2,+\infty[$ qui s'annule en 3.

Exercice n°3 :

On pose $g(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

1/ Etudier les variations de g et en déduire le signe de g(x) sur IR.

2/ a/ Montrer que g admet des primitives sur IR.

b/ Déterminer la primitive f de g sur IR qui vérifie $f(0)=\dfrac{3}{2}$.

3/ a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ. Tracer $\mathscr{C}_f$ et Δ dans un repère orthonormé.

Exercice n°4 :

Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$

1/ a/ Montrer que f admet au moins une primitive sur IR.

b/ Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en 0. Montrer que la fonction F est impaire.

2/ Pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ on pose $G(x)=F(\tan x)$.

a/ Montrer que G est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$. En déduire que $G(x)=x$.

b/ Calculer $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $F\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3/ Soit H la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $H(x)=F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+F\left(\dfrac{x}{2+x}\right)$

Calculer H'(x). En déduire que $F\left(\dfrac{1}{2}\right)+F\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan^2 x$ .On désigne par F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en zéro.

1/ Calculer $Fog(0)$.

2/ a/ Montrer que Fog est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

http://ymaths.e-monsite.com/

b/ Calculer $(Fog)'(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3/ En déduire l'expression de $(Fog)(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

4/ Calculer $F(1)$.

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,\ 1]$ par : $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-2x+2}$ et F la primitive de f sur $]-\infty,\ 1]$ qui s'annule en 1.

1/ Soit $G : x\mapsto F\left(1-\tan\dfrac{x}{2}\right)$ avec $x\in[\,0,\pi\,[$

a/ Montrer que G est dérivable sur $[\,0,\pi\,[$ et calculer $G'(x)$.

b/ Déterminer $G(x)$ pour tout $x\in[\,0,\pi\,[$ puis calculer F(0).

2/ Soit H la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

a/ Montrer que H est dérivable sur $]-\infty,1[$ et calculer $H'(x)$.

b/ En déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$: $F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\pi-F(x)$

3/ Soit $(U_n)_{n\in IN}$, la suite réelle définie sur IN par : $U_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}F\left(\dfrac{1}{k}\right)$

a/ Montrer que pour tout $n\in IN^*$ et $k\in\{n,n+1,........,2n\}$ on a : $F\left(\dfrac{1}{n}\right)\le F\left(\dfrac{1}{k}\right)\le F\left(\dfrac{1}{2n}\right)$

b/ En déduire la limite de U_n en $+\infty$.

Exercice n°7 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

1/ a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2/ Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en zéro

a/ Montrer que F est impaire.

b/ Montrer que pour tout $t\in[0,+\infty[$: $1\le f(t)\le 2$

c/ En déduire que pour tout $x\ge 0$: $x\le F(x)\le 2x$

d/ Déterminer alors la limite de F(x) en $+\infty$.

e/ Dresser le tableau de variations de F sur IR.

3/ Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par H(x) = F (tan x).

a/ Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

b/ Dresser le tableau de variations de H.

http://ymaths.e-monsite.com/