Fonctions réciproques

Exercice n°1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

1/ Justifier la continuité de f.

2/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.

3/ Montrer que cette réciproque est $g(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

C_f : la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Dresser le tableau de variations de f.

2/ a/ Montrer que le point I(1,0) est un centre de symétrie de C_f.

b/ Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.

c/ Donner une équation de la tangente T à C_f au point I.

3/ a/ Montrer que la droite $D: y=x$ coupe C_f en un unique point d'abscisse α et que $-1<\alpha<0$.

b/ Donner la position relative de C_f et D.

4/ a/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle qu'on déterminera.

b/ Tracer C_f, T et $C_{f^{-1}}$ courbe de f^{-1} sur le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice n°3 :

Soit l'application $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\to IR_+$

$x \mapsto \sqrt{\tan x}$

1/ Etudier les variations de f.

2/ a/ Montrer que f admet une fonction réciproque g défini sur IR.

b/ Etudier la dérivabilité de g et déterminer sa fonction dérivée.

c/ Calculer g(0) et g(1). Tracer les courbes représentatives de f et g dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3/ Montrer que $\forall x \in IR_+^* : g(x)+g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

4/ Soit la fonction h défini sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$ par $h(x)=g\left(\dfrac{1}{\cos \pi x}\right)$.

a/ Montrer que h est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$. Donner le tableau de variations de h.

b/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(\cos \pi x)-\dfrac{\pi}{4}}{x}$.

Exercice n°4 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ **http://ymaths.e-monsite.com/**

1/ Montrer que f réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Soit f^{-1} sa réciproque

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{4}$, calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{4}\right)$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f^{-1}(y)}{y}$.

3/ Déterminer la fonction dérivée de f^{-1}, puis retrouver $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{4}\right)$.

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{1-\tan x}$

1/ a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Montrer que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ sur $[1,+\infty[$, soit $g=f^{-1}$

c/ Préciser g(1) et $g\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

d/ Montrer que g est dérivable sur J et pour tout $x\in J$; $g'(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$

2/ Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=g\left(\frac{2x-1}{2x-2}\right) & \text{si } x>1 \\ h(1)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

a/ Montrer que h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in\,]1,+\infty[$: $h'(x)=-g'(x)$

b/ En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$: $h(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $f(x)=1-\sin(\pi x)$.

1/ a/ Dresser le tableau de variation de f.

b/ Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle f que l'on précisera.

2/ a/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0.

b/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,1]$ que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\pi\sqrt{2x-x^2}}$

3/ On pose $h(x)=f^{-1}(1-\sin x)+f^{-1}(1-\cos x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

a/ Montrer que h est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

b/ Montrer que h est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.

c/ Calculer h(0) et en déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a : $2f^{-1}(1-\sin x)+2f^{-1}(1-\cos x)-1=0$