Fonctions réciproques

Exercice n°1 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

1/ Justifier la continuité de f.

2/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle I que l'on précisera.

3/ Montrer que cette réciproque est $g(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$.

C_f : la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ Dresser le tableau de variations de f.

2/ a/ Montrer que le point I(1,0) est un centre de symétrie de C_f.

b/ Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.

c/ Donner une équation de la tangente T à C_f au point I.

3/ a/ Montrer que la droite $D: y=x$ coupe C_f en un unique point d'abscisse α et que $-1<\alpha<0$.

b/ Donner la position relative de C_f et D.

4/ a/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle qu'on déterminera.

b/ Tracer C_f, T et $C_{f^{-1}}$ courbe de f^{-1} sur le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$

1/ Montrer que f réalise une bijection de $[-1,0]$ sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Soit f^{-1} sa réciproque

2/ Montrer que f^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{4}$, calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{4}\right)$. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f^{-1}(y)}{y}$.

3/ Déterminer la fonction dérivée de f^{-1}, puis retrouver $\left(f^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-\tan x}$

1/ a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ Montrer que f est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ sur $[1,+\infty[$, soit $g = f^{-1}$

c/ Préciser g(1) et $g\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

d/ Montrer que g est dérivable sur J et pour tout $x\in J$; $g'(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$

2/ Soit h la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=g\left(\dfrac{2x-1}{2x-2}\right) & \text{si } x>1 \\ h(1)=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$

a/ Montrer que h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x\in]1,+\infty[$: $h'(x)=-g'(x)$

b/ En déduire que pour tout $x\in[1,+\infty[$: $h(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{4}$