Mr. Rekik Sabeur **$4^{\text{ième}}$ Maths**

Série d'exercices : Intégrales

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur [0, 3] par : $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{si } x=0\\ 1 & \text{si } 0<x<1\\ 3 & \text{si } x=1\\ -2 & \text{si } 1<x\leq 2\\ 4 & \text{si } 2<x\leq 3\end{cases}$

1) Calculer $\int_0^3 f(t)\,dt$.

2) Soit $x\in[0,3]$, calculer $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

3) Montrer que F est une fonction continue sur [0, 3]. La fonction F est – elle dérivable sur [0, 3].

Exercice n°2 :

On définit la fonction *f* définie sur [0 ;1] par $f(x)=\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, puis la fonction *F* définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par : $F(x)=f(\sin x)$.

1) Montrer que la fonction *F* est dérivable et calculer sa dérivée, notée *F'*.

2) Montrer que, pour tout *x* de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $F(x)=\int_0^x \cos^2 t\,dt$.

3) Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$

4) En déduire la valeur commune des deux intégrales.

5) En déduire $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.

Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $f(x)=\cos^2 x\sin(2x)$.

1) Etudier f et construire sa courbe $\mathscr{C}$.

2) Calculer l'aire de la partie limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

Exercice n°4 :

On considère la fonction F définie sur IR par $\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$.

1) Vérifier que F est dérivable sur IR et déterminer sa fonction dérivée.

2) Montrer que F est impaire.

3) a) Montrer que pour tout $x\in \mathrm{IR}_+$; $\frac{x}{\sqrt{1+16x^2}}\leq F(x)\leq\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4) Etudier les variations de F.

5) Tracer la courbe représentative C de F dans un repère orthonormé

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1) a) Montrer que, pour tout x de $[0,1]$, $1-x^2\leq\frac{1}{1+x^2}\leq 1-x^2+\frac{x^3}{2}$

b) En déduire un encadrement de $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

2) Représenter dans un repère orthonormé, la fonction f.

3) a) Soit l'aire de partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b) Utiliser la méthode des rectangles, déterminer une valeur approchée de I en prenant pour n la valeur 5.

Exercice n°6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique $5\,cm$.

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1}$

1) Etudier f et construire sa courbe C dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

Tracer dans le même repère que C la courbe C' de f^{-1}.

b) Calculer l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2+\sqrt{5}}{2}} \frac{4x^2-1}{8x}dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

c) En déduire l'aire du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$

Exercice n°7 :

On pose, pour tout n entier naturel, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$

1) Calculer I_0, I_1 et I_2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

2) Calculer $I_{n+2} + I_n$.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

4) Calculer $f(n) = I_{n+4} - I_n$ en fonction de n.

5) Calculer $\sum_{k=1}^{n} f(4k-2)$ en fonction de I_2 et de I_{4n+2}.

6) En déduire la limite de $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°8 :

Soit la suite (U_n) définie par $U_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$, $n \ge 1$.

1) Calculer U_1.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) Montrer que pour tout $n \ge 1$, $\frac{1}{n+1} \le U_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

4) a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$; $0 \le \sqrt{2} - \sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}(1-t)$

b) En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{n+1} - \frac{1}{2n^2} \le U_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,U_n)$.

Exercice n°9 :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ et $V_n = \frac{U_n}{\sqrt{n}}$

1) a) Montrer que : • $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_p^{p+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \le \frac{1}{\sqrt{p}}$ et • $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\int_{p-1}^{p}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \ge \frac{1}{\sqrt{p}}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \le U_n \le 2\sqrt{n} - 1$.

2) Déterminer les limites des suites (U_n) et (V_n).