Exercice n°1 :

1/ Calculer les intégrales suivants :

a/ $A=\int_1^2 \left(x^2-2x\right)dx$ c/ $B=\int_0^1 \frac{dt}{(2+t)^2}$ d/ $C=\int_0^1 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$ e/ $D=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 x\right)\tan x\,dx$

2/ Soient $I=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ et $J=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$

a/ Montrer que $I=\frac{1}{2}\ln 2$

b/ Calculer $I+J$ et en déduire la valeur de J.

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=e^{2x}\ \ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1/ Montrer que pour tout $x\in \mathrm{IR}$; $f'(x)-2f(x)=\frac{-e^x}{1+e^{-x}}$

2/ a/ Vérifier que pour tout réel x, $\frac{e^x}{1+e^{-x}}=e^x-\frac{e^x}{1+e^x}$

b/ Calculer alors $\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^{-x}}\,dx$.

c/ Déduire $\int_0^{\ln 2} f(x)\,dx$.

Exercice n°3 :

On considère les intégrales $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$.

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

1/ Calculer $f'(x)$.

2/ En déduire la valeur de I.

3/ a/ Sans calculer I, J et K vérifier que $J+2I=K$.

b/ Montrer que $K=\sqrt{3}-J$ en utilisant une intégration par parties.

c/ En déduire les intégrales J et K.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{e^{-x}}{2-x}$.

1/ a/ Etudier les variations de f.

b/ En déduire que pour tout $x\in[0,1]$; $\frac{1}{e}\le f(x)\le\frac{1}{2}$.

2/ Soit J l'intégrale définie par $J=\int_0^1 (2+x)e^{-x}\,dx$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J=3-\frac{4}{e}$.

3/ Soit K l'intégrale définie par $K=\int_0^1 \frac{x^2e^{-x}}{2-x}\,dx$.

A l'aide d'un encadrement de f obtenu précédemment, montrer que $\frac{1}{3e}\le K\le\frac{1}{6}$.

4/ a/ Montrer que $J+K=4\int_0^1 f(x)dx$.

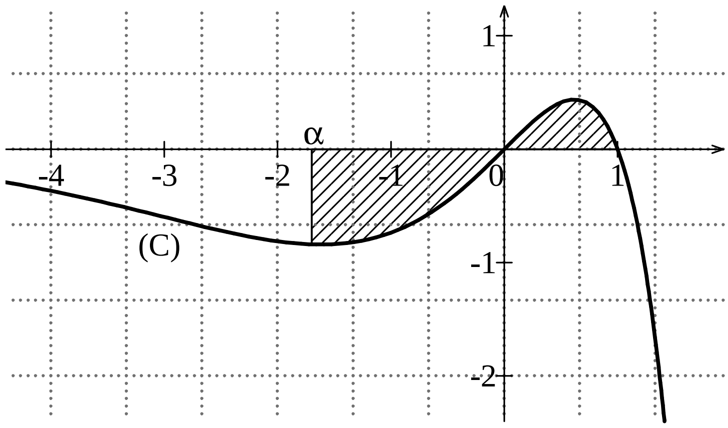
b/ En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice n°5 :

1/ Calculer, par intégration par parties, l'intégrale $I=\int_0^{\alpha}\left(x-x^2\right)e^x\,dx$; $\left(\alpha\in IR_-\right)$

2/ Soit $f\left(x\right)=\left(x-x^2\right)e^x$; $x\in IR$

On désigne par $\left(C\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. (unité 2 cm)



a/ Calculer, en cm², l'aire $\mathcal{A}\left(\alpha\right)$ de la partie délimitée par $\left(C\right)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.

b/ Calculer $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\mathcal{A}\left(\alpha\right)$.

Exercice n°6 :

1/ Soit f la fonction définie sur IR par $f\left(x\right)=x^2e^{1-x}$

$\left(C\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm)

a/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b/ Dresser le tableau de variation de f.

c/ Tracer $\left(C\right)$.

2/ Pour tout $n\in IN^*$, $I_n=\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$

a/ Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.

b/ Calculer I_1 puis I_2.

c/ Donner une interprétation graphique du nombre I_2.

3/ a/ Montrer que pour tout $x\in\left[0,1\right]$ et pour tout $n\in IN^*$ on a : $x^n\le x^ne^{1-x}\le e\,x^n$

b/ En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°7 :

Soit f la fonction sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x)=-1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

1/ a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ En déduire le signe de $f\left(x\right)$.

2/ Soit g la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $g(x)=\sqrt{x^2+2x}-x+1$ et G la fonction définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $G(x)=\int_0^x t\,g(t)\,dt$.

a/ Dresser le tableau de variations de g.

b/ Montrer que G est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et calculer $G'\left(x\right)$.

c/ Montrer que pour tout $x\ge0$: $G(x)\ge\dfrac{1}{2}x^2$.

d/ En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}$.

e/ Dresser le tableau de variation de G.

f/ Donner l'allure de la courbe de G sur un repère orthonormé.