Intégrales

Exercice n°1 :

http://ymaths.e-monsite.com/

Calculer les intégrales :

$A=\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx$; $B=\int_{0}^{1}\frac{dt}{(2+t)^2}$; $C=\int_{0}^{1}\sqrt{1+x}\,dx$; $D=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt$

$F=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\tan x\,dx$; $G=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^3 x\,dx$; $H=\int_{0}^{1}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}dx$

$I=\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|dx$; $J=\int_{-1}^{1}|x^3-x|dx$; $K=\int_{-2}^{2}(|x|+x)\,dx$; $L=\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$

Exercice n°2 :

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\cos^4 x-\cos^2 x$

1/ Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire que $f''(x)+16f(x)$ est constante.

2/ En déduire la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$.

Exercice n°3 :

Pour x dans $[0,1]$, on définit les fonctions suivantes :

$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; $g(x)=-\frac{x}{2}+1$ et $h(x)=-\frac{x^2}{2}+1$

1/ Montrez que pour tout x appartenant à $[0,1]$, on a : $g(x)\le f(x)\le h(x)$

2/ Montrez alors que l'on a : $\frac{3}{4}\le\int_{0}^{1}f(x)\,dx\le\frac{5}{6}$

Exercice n°4 :

On considère les intégrales $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2t+1)\cos^2(t)\,dt$ et $J=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2t+1)\sin^2(t)\,dt$

1/ Calculer $I+J$.

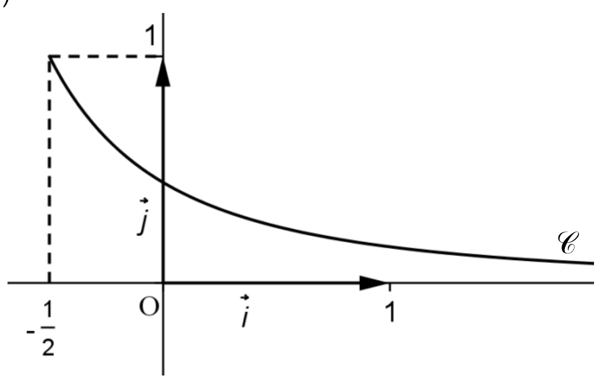
2/ Calculer $I-J$ à l'aide d'une intégration par parties.

3/ En déduire les intégrales I et J.

Exercice n°5 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique $5\,cm$.

Le schéma ci-après donne la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{4}{(2x+3)^2}$.



Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=1$.

http://ymaths.e-monsite.com/

Exercice n°6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

http://ymaths.e-monsite.com/

Soit P_1 la parabole d'équation $y = x^2 - 2$ et P_2 la parabole d'équation $y = -x^2 + 2x + 2$.

1/ Tracer P_1 et P_2.

2/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P_1 et P_2.

3/ Calculer l'aire de la partie $\mathscr{D}$ du plan entre P_1 et P_2.

Exercice n°7 :

On définit la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$, puis la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x) = f(\sin x)$.

1/ Montrer que la fonction F est dérivable et calculer sa dérivée, notée F'.

2/ Montrer que, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x) = \int_0^x \cos^2 t\, dt$

3/ Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$

4/ En déduire la valeur commune des deux intégrales.

5/ En déduire $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt$.

Exercice n°8 :

Soit f la fonction sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$.

1/ a/ Dresser le tableau de variations de f.

b/ En déduire le signe de $f(x)$.

2/ Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x^2+2x} - x + 1$ et G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $G(x) = \int_0^x t\, g(t)dt$.

a/ Dresser le tableau de variations de g.

b/ Montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $G'(x)$.

c/ Montrer que pour tout : $x \geq 0$: $G(x) \geq \frac{1}{2}x^2$.

d/ En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{G(x)}{x}$.

e/ Dresser le tableau de variation de G.

f/ Donner l'allure de la courbe de G sur un repère orthonormé.

Exercice n°9 :

Soit G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = \int_1^{1+\sin x} \sqrt{2t-t^2}\, dt$

1/ Montrer que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer $G'(x)$.

2/ En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $G(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x)$. $\left(\text{Ind} : \cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}\right)$

3/ Calculer alors $\int_1^2 \sqrt{2t-t^2}\, dt$.

4/ En effectuant une intégration par partie, calculer $\int_1^2 \dfrac{t(1-t)}{\sqrt{2t-t^2}}\, dt$.

http://ymaths.e-monsite.com/