Isométries du plan

Exercice n°1 :

Soit ABCD un carré direct de centre O

1/ Déterminer les droites Δ_1 et Δ_1' tel que $R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{\Delta_1} o S_{(AB)} = S_{(AB)} o S_{\Delta_1'}$.

2/ Déterminer les droites Δ_2 et Δ_2' tel que $t_{\overrightarrow{AC}} = S_{\Delta_2'} \circ S_{(BD)} = S_{(BD)} \circ S_{\Delta_2}$

3/ Déterminer les droites Δ_3 et Δ_3' tel que $S_O = S_{\Delta_3'} \circ S_{(AC)} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta_3}$

Exercice n°2 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère l'application f de P dans P, qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = x+1 \end{cases}$

1/ Montrer que f est une isométrie du plan.

2/ Montrer que f admet un seul point invariant I.

3/ En déduire la nature de f.

4/ On pose $O' = f(O)$.

a/ Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IO'}\right)$.

b/ En déduire les éléments caractéristiques de f.

Exercice n°3 :

Soit ABC un triangle équilatérale direct inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O.

On désigne par I le milieu de [AC], soient $D = S_I(B)$ et $E = S_C(A)$.

1/ On considère les isométries : $f = S_{(BD)} \circ S_{(AD)}$ et $g = R_{\left(A,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

a/ Caractériser f.

b/ Déterminer la droite Δ telle que : $g = S_\Delta \circ S_{(AD)}$

c/ En déduire que $g \circ f^{-1}$ est une symétrie centrale dont on précisera le centre.

2/ Soit M un point du plan, on pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$

Montrer que le point I est le milieu du segment $[M_1M_2]$.

3/ Soient H le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$ et Δ' la perpendiculaire à (AC) passant par E.

Caractériser les applications : $T = S_{\Delta'} \circ S_{(CH)}$ et $h = T \circ S_{(CH)} \circ S_E$

Exercice n°4 :

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre O et f une isométrie du plan qui laisse globalement invariant $\{A, B, C\}$.

1/ a/ Montrer que f fixe le point O.

b/ Montrer que si f fixe deux points distincts de $\{A, B, C\}$ alors f = Idp.

2/ a/ Caractériser les isométries qui fixent un seul point de $\{A, B, C\}$.

b/ Trouver toutes les isométries qui laissent globalement invariant $\{A, B, C\}$.

Exercice n°5 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O.

On désigne par :

- I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [OC].
- S : la symétrie centrale de centre O.
- R : le quart de tour direct de centre I.
- $\varphi = S \circ R$

1/ a/ Déterminer $\varphi(I)$. En déduire que φ est une isométrie différente de l'identité.

b/ Déterminer $\varphi(J)$ puis $\varphi(B)$.

c/ Déduire que φ est une rotation de centre J dont on précisera l'angle.

2/ Soit g l'isométrie définie par $g = \varphi \circ S_{(AC)}$ où $S_{(AC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (AC).

a/ Caractériser : $S_{(JC)} \circ S_{(JL)}$ et $S_{(JL)} \circ S_{(AC)}$

b/ Déduire que $g = S_{(JC)} \circ S_L$

c/ On désigne par Δ_1 et Δ_2 les médiatrices respectives des segments [JC] et [OJ].

Caractériser $S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$. En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3/ Soit G le barycentre des points pondérés $(O,2)$, $(J,-1)$ et $(I,1)$ et G' son image par φ .

Exprimer $\overrightarrow{CG}$ en fonction de $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ puis construire G' sans construire G.

Exercice n°6 :

A/ Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point $M'(z')$ tel que :

$i z' = i\overline{z} + 1 - i$

1/ Montrer que f est une isométrie.

2/ Déterminer l'ensemble Δ des points invariants par f.

3/ Montrer que pour tout $M \in P$, d'image M' par f, on a :

a/ $M * M' \in \Delta$.

b/ $(MM') \perp \Delta$.

c/ Caractériser alors f.

B/ Soit g l'application de P dans P qui à tout point M(z) associe le point $M'(z')$ tel que :

$z' = i\overline{z} + 2$

1/ Montrer que g est une isométrie.

2/ Déterminer l'ensemble des points invariants par g.

3/ Montrer que gog est une translation dont on précisera le vecteur $\vec{v}$.

4/ On pose f = $t_{\vec{u}}$og avec $\vec{v}$ = -2$\vec{u}$.

a/ Donner la transformation complexe associé à f.

b/ Caractériser f.

c/ En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.