

REPUBLIQUE TUNISIENNE
 MINISTRE DE L'EDUCATION
EXAMEN DU BACCALAUREAT
SESSION DE JUIN 2011

SESSION
PRINCIPALE

SECTION : SCIENCES EXPERIMENTALES
EPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3h

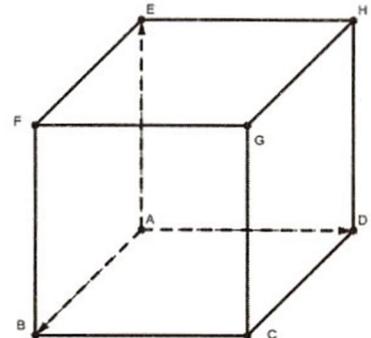
COEFFICIENT : 3

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3
 La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
 Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
 Aucune justification n'est demandée.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
 On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- 1) Le vecteur $\overrightarrow{BF} \wedge \overrightarrow{BC}$ est égal à
 a) \overrightarrow{BG} b) \overrightarrow{BD} c) \overrightarrow{BA} .
- 2) L'intersection des plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$ est la droite
 a) (CH) b) (CF) c) (CG).
- 3) Une équation du plan (ACE) est
 a) $x + y = 0$ b) $x - y = 0$ c) $x - y = 1$.
- 4) L'intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ avec le plan d'équation $z = 1$ est
 a) un cercle b) un point c) l'ensemble vide.

Exercice 2 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

- 1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes a et b.
 b) Vérifier que $b^2 = a$.
- 2) Soit C le point d'affixe $c = a + b$.
 a) Placer les points A, B et C.
 b) Vérifier que $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.
- 3) On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + z - c = 0$.
 a) Vérifier que b est une solution de l'équation (E).
 b) On désigne par d la deuxième solution de l'équation (E).

Montrer que $d = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} e^{i\left(\frac{-11\pi}{12}\right)}$

- c) Placer alors, le point D d'affixe d.

Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 3/3), on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe C de la fonction logarithme népérien («ln »).

1) Placer les points de la courbe C d'abscisses e et \sqrt{e} .

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$.

On note C_f sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{2 \ln x - 1}{x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

3) a) Etudier la position relative des courbes C_f et C .

b) Tracer C_f dans l'annexe ci-jointe.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C_f et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

a) Montrer que $\int_1^e \ln^2 x \, dx = e - 2$.

b) Calculer A .

Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction

$f : x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1) a) Utiliser le graphique pour justifier que l'équation

$e^{-\frac{x}{4}} = x$ admet dans $[0, 1]$ une solution unique α .

b) Vérifier que $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur \mathbb{N} par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) ; n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n , $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n , $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers α .

3) a) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$.

b) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

