

Nombres complexes

Exercice n°1 :

On considère les nombres complexes suivants : $z_1 = 3 - 4i$ et $z_2 = -2 + 3i$

Mettre sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants et calculer son module.

$$2z_1 - 3z_2, \quad z_1^2 - \overline{z_2}, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad z_1 z_2, \quad (2z_1 - z_2)(z_1 + z_2), \quad \frac{iz_1 + 1}{z_2 + i}$$

Exercice n°2 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 2$, $Z_B = 1 + i$ et $Z_C = 2 + 2i$.

1- Placer les points A, B et C.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

2- Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3-a- Déterminer l'affixe du point I milieu du segment [AC].

b- Déterminer l'affixe du point E tel que : $\overline{AB} + 3\overline{AE} = \overline{AC}$

c- Déterminer l'affixe du point D symétrique de B par rapport à I et vérifier que ABCD est un carré.

Exercice n°3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1$ et $z_B = -i$.

A tout point M ($z \neq -i$) on associe le point M' (z') tel que : $z' = \frac{1-z}{1-iz}$.

1- Déterminer les ensembles suivants :

$$E_1 = \{M(z) \in P \text{ tel que } z' \text{ soit réel}\}.$$

$$E_2 = \{M(z) \in P \text{ tel que } z' \text{ soit imaginaire pur}\}.$$

$$E_3 = \{M(z) \in P \text{ tel que } |z'| = 1\}.$$

2-a- Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.

b- En déduire que $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$.

c- Montrer alors que si M appartient au cercle de centre B et de rayon 1, M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

Exercice n°4 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$ et $z_C = -3i$.

A tout point M ($z \neq -3i$) on associe le point M' (z') tel que : $z' = \frac{3iz-1}{z+3i}$.

1- Déterminer les points M(z) tel que $z' = z$.

2- Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z' = 2$.

3- En posant $z = x + iy$ avec x et y des réels déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan vérifiant $\frac{MB}{MA} = \frac{1}{2}$. (On remarquera que C est un point de E).

3-a- Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -3i\}$ on a : $\frac{z'+i}{z'-i} = 2 \frac{z+i}{z-i}$.

b- En déduire que si $M \in E \setminus \{C\}$ alors M' appartient à une droite dont on précisera.

Exercice n°5 :

1- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, montrer que : $\frac{iz-1}{i-z}$ est réel si et seulement si $|z| = 1$.

2- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrer que : $\frac{1+z}{1-z}$ est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$