Exercice n°1

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on donne les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + 3i$ et $z_2 = \sqrt{3} - 3i$

1- Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.

2- Calculer $u = z_1^4 + z_2^4$

3- Soit $Z = (1 - i)\ z_1$

a- Donner la forme trigonométrique de Z.

b- En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et celle de $\sin\frac{\pi}{12}$.

4- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a- Placer le point A d'affixe z_1.

b- Déterminer l'ensemble E des points M(z) du plan tels que : $\arg(-2\bar{z}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Exercice n°2:

Soit $Z = \dfrac{\bar{z}}{1+iz}$ où z est un nombre complexe différent de i. On désigne par M et N les points d'affixes respectives z et Z. On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

1- Donner la forme exponentielle de $\bar{z}$ et de $1+iz$.

2- En déduire la forme exponentielle de Z.

3- Pour quelle valeur de θ les points O, M et N sont alignés.

Exercice n°3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 1 cm.

On appelle (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit f l'application du plan P privé du point O dans P qui à tout point M différent de O d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z + i - \frac{1}{z}$

1- On considère les points A et B d'affixes respective $a = i$ et $b = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A' et B' d'affixes respectives a' et b'.

a- Calculer a' et b'. Placer les points A, B, A' et B' sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b- Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{i\sqrt{3}}{3}$. En déduire la nature du triangle OBB'.

2- a- Déterminer l'ensemble (E) des points M de $P \setminus \{O\}$ qui ont pour image, par f, le point O.

b- Démontrer que ces points de (E) appartient à (C).

3- Soit θ un réel.

a- Montrer que si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = (1 + 2\sin\theta)i$.

b- Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M' lorsque M décrit le cercle (C).

Exercice n°4

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + e^{i\theta}$ et $z_B = 1 - e^{i\theta}$, avec $\theta \in \left]0, \pi\right[$.

1-Montrer que lorsque θ varie dans $]0,\pi[$, alors les points A et B décrivent un cercle qu'on précisera.

2-Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

3-Montrer que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont perpendiculaires.

4-Déterminer θ pour que le triangle AOB soit isocèle de sommet principal O.

Exercice n°5

1- Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

$Z_1 = 1 + i\tan\theta$ $\qquad$ $Z_2 = (1-\tan\theta) + i(1+\tan\theta)$.

2- Soit $\theta \in]0,\pi[$, on pose $Z = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2\theta$.

Ecrire Z sous forme trigonométrique.

3- Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$, on pose $Z = e^{i\theta}$, déterminer suivant θ le module et un argument de $1 + Z + Z^2$.

4- Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, déterminer le module et un argument de $Z = z - e^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z}$.

Exercice n°6

$(O,\vec{u},\vec{v})$ un repère orthonormé direct du plan. A le point d'affixe $-i$.

A tout $M \in P\setminus\{A\}$ d'affixe on associe le point $M' = f(M)$ d'affixe $z' = \frac{z}{iz-1}$.

1- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $z' = z$.

2-a- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $z' \in IR$.

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'| = 1$.

3-a- Vérifier que : $z' + i = \frac{-1}{z+i}$

b- Montrer que : $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}}) + (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM'}}) \equiv \pi[2\pi]$ et $AM' \times AM = 1$

c- Montrer que si $M \in [A,\vec{v})$ alors $M' \in [A,\vec{v})$

d- Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' appartient au cercle de centre A et de rayon 2.

4- On pose $z = ie^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,\pi]$. Montrer que : $z' = \frac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}.e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$

Exercice n°7

Le plan est rapporté à un r.o.n.d $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A et B les points d'abscisses respectives i et – i.

A tout point M ($z \neq i$) on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = i + \frac{2}{\overline{z}+i}$

1- Résoudre l'équation $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}$

2- a- Déterminer un argument de $(z'-i)(\overline{z}+i)$, que peut-on déduire pour les points A, M et M'?

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $z' = z$.

3- a-Soit M_1 le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses, montrer que

$z' \in IR_-^* \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{BM_1},\overrightarrow{AM_1}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

b- En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $z' \in IR_-^*$.