

Primitives

Exercice n°1 :

Donner une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 3x + 1$, $I = \mathbb{R}$

2/ $f(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$, $I =]0, +\infty[$

3/ $f(x) = (x+1)^2 - (2x+1)^3$, $I = \mathbb{R}$

4/ $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^4} - \frac{2}{(x+1)^2}$, $I =]-\infty, -1[$

5/ $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 3)^4$, $I = \mathbb{R}$

6/ $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^3} - \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $I = \mathbb{R}$

7/ $f(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $I = [-2, +\infty[$

8/ $f(x) = \frac{x}{(x+1)^5}$, $I =]-1, +\infty[$

9/ $f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$, $I = \mathbb{R}$

10/ $f(x) = \sin x \tan^2 x$, $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

11/ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})$, $I =]0, +\infty[$

<http://ymaths.e-monsite.com/>

Exercice n°2 :

On pose $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 7}{(x-2)^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1/ Déterminer les réels a , b et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

2/ a/ Montrer que f admet des primitives sur $]2, +\infty[$

b/ Déterminer la primitive F de f sur $]2, +\infty[$ qui s'annule en 3.

Exercice n°3 :

On pose $g(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1/ Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2/ a/ Montrer que g admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

b/ Déterminer la primitive f de g sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = \frac{3}{2}$.

3/ a/ Dresser le tableau de variation de f .

b/ Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ . Tracer $\mathcal{C}_f$ et Δ dans un repère orthonormé.

Exercice n°4 :

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

1/ a/ Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.

b/ Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Montrer que F est impaire.

2/ Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose $G(x) = F(\tan x)$.

a/ Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$. En déduire que $G(x) = x$.

b/ Calculer $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $F\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3/ Soit H la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $H(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{2+x}\right)$

Calculer $H'(x)$. En déduire que $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ et g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan^2 x$. On désigne par F la primitive de f sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en zéro.

1/ Calculer $F(0)$.

2/ a/ Montrer que $F \circ g$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

<http://ymaths.e-monsite.com/>

b/ Calculer $(F \circ g)'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3/ En déduire l'expression de $(F \circ g)(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4/ Calculer $F(1)$.

Exercice n°6 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par : $f(x) = \frac{-2}{x^2 - 2x + 2}$ et F la primitive de f sur $]-\infty, 1]$ qui s'annule en 1.

1/ Soit $G : x \mapsto F\left(1 - \tan \frac{x}{2}\right)$ avec $x \in [0, \pi[$

a/ Montrer que G est dérivable sur $[0, \pi[$ et calculer $G'(x)$.

b/ Déterminer $G(x)$ pour tout $x \in [0, \pi[$ puis calculer $F(0)$.

2/ Soit H la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par : $H(x) = F(x) + F\left(\frac{x}{x-1}\right)$

a/ Montrer que H est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et calculer $H'(x)$.

b/ En déduire que pour tout $x \in]-\infty, 1[$: $F\left(\frac{x}{x-1}\right) = \pi - F(x)$

3/ Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} F\left(\frac{1}{k}\right)$

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$ on a : $F\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{k}\right) \leq F\left(\frac{1}{2n}\right)$

b/ En déduire la limite de U_n en $+\infty$.

Exercice n°7 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

1/ a/ Dresser le tableau de variations de f .

b/ Tracer la courbe C_f de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2/ Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro

a/ Montrer que F est impaire.

b/ Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$: $1 \leq f(t) \leq 2$

c/ En déduire que pour tout $x \geq 0$: $x \leq F(x) \leq 2x$

d/ Déterminer alors la limite de $F(x)$ en $+\infty$.

e/ Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

3/ Soit H la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = F(\tan x)$.

a/ Montrer que H est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$.

b/ Dresser le tableau de variations de H .

<http://ymaths.e-monsite.com/>