Fonction dérivée

1. Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

La fonction qui, à chaque réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$,

est appelée fonction dérivée de f sur I et notée f'.

Exemple

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2$.

Pour tout réel a, f est dérivable en a (fonction polynôme) et $f'(a)=2a$.

La fonction dérivée de f est donc la fonction f' définie sur IR par $f'(x)=2x$.

2. Opérations sur les fonctions dérivées

⇨ Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, α et β deux réels.

- Les fonctions $f+g$, fg, $\alpha f+\beta g$ sont dérivables sur I et on a :
  $(f+g)'=f'+g'$; $(fg)'=f'g+g'f$; $(\alpha f+\beta g)'=\alpha f'+\beta g'$
- Pour tout entier naturel $k\geq 2$, la fonction f^k est dérivable sur I et on a $\left(f^k\right)'=kf'f^{k-1}$.
  En particulier toute fonction polynôme est dérivable sur IR.

⇨ Soit f et g deux fonctions dérivables sur intervalle I telles que f ne s'annule pas sur I.

- Les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables sur I et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2} \qquad ; \qquad \left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}$$

- Pour tout entier naturel $k\geq 1$, la fonction $\frac{1}{f^k}$ est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{1}{f^k}\right)'=\frac{-kf'}{f^{k+1}}.$$

3. Dérivée de la fonction $\sqrt{f}$

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

4. Dérivée de la fonction $x\mapsto f(ax+b)$

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a et b deux réels.

Alors la fonction $g:x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable en tout réel x tel que $ax+b$ appartient à I et a pour fonction dérivée $g':x\mapsto af'(ax+b)$.

5. Sens de variation

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x)=0$.

La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x)\geq 0$.

La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x)\leq 0$.

6. Extrema

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f admet un maximum local (resp. minimum local) en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que $f(x)\leq f(a)$ (resp. $f(x)\geq f(a)$), $x\in J$.

Lorsque f admet un minimum ou un maximum local en a on dit que f admet extremum local en a.

Théorème
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

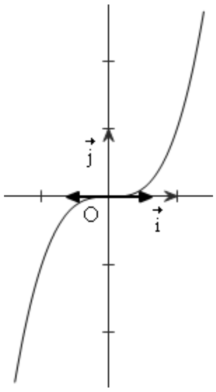
Remarques

- Si f' s'annule en a sans changer de signe alors f n'admet pas d'extremum en a.

  Exemple : $f(x) = x^3$

  La fonction f est dérivable sur IR et $f'(x) = 3x^2 \geq 0$.

  La fonction f n'admet pas d'extremum.



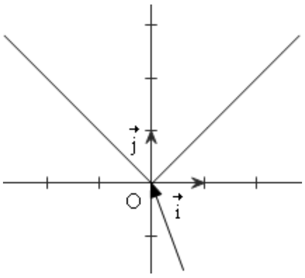
Courbe représentative de f définie par $f(x) = x^3$

- Une fonction f peut admettre un extremum en a de son domaine de définition sans qu'elle soit dérivable en a.

  Exemple : $f(x) = |x|$; $D_f = IR$

  La fonction f n'est pas dérivable en $a = 0$.

  La fonction f admet un minimum en 0.



f admet un minimum absolu en 0