Nombres complexes

1/ Définition et propriétés

■ Définition et opérations sur les nombres complexes

Théorème et définitions :

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, de nombres appelés ensemble des nombres complexes, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient IR.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans IR.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i, vérifiant $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme (dite écriture cartésienne ou algébrique) : $z = x + i\,y$ où x et y sont des réels.

Vocabulaire et notation :

Le réel x est appelé partie réelle de z et est noté **Re(z)**.

Le réel y est appelé partie imaginaire de z et est noté **Im(z)**.

Si $y = 0$ alors $z = x + 0i$ est noté $z = x$ et z est un réel.

Si $x = 0$ et $y \neq 0$ alors $z = 0 + i\,y$ est noté $z = i\,y$ et z est appelé imaginaire pur.

Le complexe $0 + 0i$ noté 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Conséquences :

Soit $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ où x, y, x' et y' sont des réels

$z = z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$

$z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$

Propriétés :

Soit $z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$ où x, y, x' et y' sont des réels

- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
- $-z = -x + i(-y)$ $\quad$ ($-z$ est l'opposé de z)
- $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ (Formule à ne pas apprendre !)

  En particulier, pour tous réels x et y : $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$
- Si de plus $z \neq 0$; $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) + i\left(\dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)$ (Formule à ne pas apprendre !)

Remarque :

Contrairement à IR, la notion d'ordre n'a aucun sens sur $\mathbb{C}$: on ne peut pas donc ordonner les nombres complexes ; écrire $z > 0$ lorsque z n'est pas réel n'aura donc aucune sens.

Puissance de i :

On a : $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$;……

D'une manière générale : $i^n = i^r$ où r est le reste de la division de n par 4. ($r \in \{0, 1, 2, 3\}$)

■ Conjuguée d'un nombre complexe

Définition

On appelle conjuguée du nombre complexe $z = x + i\,y$, où x et y réels, le nombre complexe noté $\overline{z}$ est défini par $\overline{z} = x - i\,y$.

Propriétés :

Pour tous complexes z et z', on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$

  Ces résultats s'étendent à une somme algébrique de n termes.
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

  Ces résultats s'étendent à un produit de n termes : pour tout entier naturel n, $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$.

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$ si $z \neq 0$
- Si $z = x + i\,y$ avec x et y réels alors $z\overline{z} = x^2 + y^2$ donc pour $z \neq 0$, soit

  si $(x, y) \neq (0,0)$, on a $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$.

  C'est la méthode utilisée pour écrire sous forme algébrique un inverse ou un quotient.

Théorème :
Soit z un nombre complexe.

- $z + \overline{z} = 2\,\mathbf{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\,\mathbf{Im}(z)$
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

■ Equation $z^2 = \alpha$; $\alpha \in IR$

Théorème :
Pour tout réel α non nul, l'équation $z^2 = \alpha$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$.

- Lorsque $\alpha > 0$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = \alpha$ sont : $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$.
- Lorsque $\alpha < 0$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = \alpha$ sont : $i\sqrt{|\alpha|}$ et $-i\sqrt{|\alpha|}$.

2/ Représentation géométrique d'un nombre complexe :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définitions
Soit le complexe $z = x + i\,y$; x et y réels.

- Le point $M(x, y)$ est appelé le point image de z. On le note souvent $M(z)$.
- Le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le vecteur image de z. On le note souvent $\vec{w}(z)$.
- Le complexe z est l'affixe du point M et l'affixe du vecteur $\vec{w}$.

  On le note souvent z_M ou $z_{\vec{w}}$ ou aff (M) ou aff $(\overrightarrow{AB})$.
- Le plan est alors appelé plan complexe.

  Autrement dit :

  $M(x, y)$ dans le plan cartésien, si et seulement si, M a pour affixe $z = x + i\,y$ dans le plan complexe.

***Affixe d'un vecteur* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$:** aff $(\overrightarrow{AB}) =$ aff $(B) -$ aff (A)

On note souvent : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même affixe.

Affixe du milieu d'un segment :

Si I est le milieu du segment [AB] alors $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

Propriétés :
Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w}\,'$ et pour tout réel α :

- $z_{\vec{w}+\vec{w}'} = z_{\vec{w}} + z_{\vec{w}'}$
- $z_{\alpha\vec{w}} = \alpha z_{\vec{w}}$. En particulier $z_{-\vec{w}} = -z_{\vec{w}}$

3/ Module d'un nombre complexe

Définition

Le module du complexe $z = x + i y$, noté $|z|$, est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Remarque :

Le module d'un réel est sa valeur absolue, ce qui justifier la notation.

Interprétation géométrique du module :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- $|z|$ est la distance entre O est le point $M(z)$.

  Si $z_M = x + i y$ alors $OM = |z_M| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Pour tout points M et N du plan complexe d'affixes respectives z_M et z_N, on a

  $MN = |z_N - z_M|$.

Propriétés :

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|\overline{z}| = |z|$ et $|-z| = |z|$
- $|z|^2 = z \times \overline{z}$

Conséquence :

Si $|z| = 1$ alors $\frac{1}{z} = \overline{z}$

Module et opérations :

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $|z.z'| = |z| \times |z'|$; $|z^n| = |z|^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $|z\overline{z}| = |z|^2$
- Pour tout réel α, $|\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ (module de $\alpha =$ valeur absolue de α)
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ $(z \neq 0)$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

4/ Argument d'un nombre complexe non nul :

Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de z, noté $\arg(z)$, toute mesure en radians, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Remarques :

- Le complexe 0 n'a pas d'argument.
- Tout complexe non nul z a une infinité d'arguments. Si θ est l'un deux, tout autre argument de z est de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On écrit alors : $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Conséquences :

- z réel non nul si et seulement si $M(z)$ est sur l'axe (Ox),

  ce qui se traduit par $\arg(z) = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- z imaginaire pur non nul si et seulement si $M(z)$ est sur l'axe (Oy),

  ce qui se traduit par $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Propriétés :

Pour tout nombre complexe non nul z.

- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)$ $[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)$ $[2\pi]$

Argument et opérations :
Pour tous nombres complexes non nuls z et z'.

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(z^2) \equiv 2\arg(z) \quad [2\pi]$
- $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
- $\arg(\frac{1}{z'}) \equiv -\arg(z') \quad [2\pi]$

5/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Pour commencer

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Nous savons que $z = x + iy$ est la forme algébrique de z, affixe du point M
En termes de coordonnées cartésiennes, on a $M(x, y)$ et en termes de coordonnées polaires, $M(r, \theta)$ avec $r = OM$ et $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$
Nous avons déjà vus que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$
donc $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Théorème et définition :
Soit z un nombre complexe non nul et θ appartient à IR.
Si $\arg(z) \equiv \theta \;\; [2\pi]$ alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$
Réciproquement, si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, alors $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta \;\; [2\pi]$.

Vocabulaire :
L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$ et $\theta \in$ IR est appelée écriture trigonométrique de z.

Propriétés :
Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'écritures trigonométriques $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

- $z \times z' = rr'\left(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right)$
- $z^2 = r^2\left(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right)$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}\left(\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')\right)$

Relations de passage entre forme algébrique et formes trigonométriques :

Forme algébrique		Formes Trigonométriques
$z = x + iy$ x et y réels	← $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$ → $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Egalité de deux complexes :
Deux complexes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même module et des arguments égaux modulo 2π.

http://ymaths.e-monsite.com/