Similitudes du plan

Exercice n°1 :

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O.
On note I, J, K et L les milieux des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].
Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en O.
1/ a/ Donner les éléments caractéristiques de S.

b/ Construire l'image du carré ABCD par la similitude S.
2/ Démontrer que S(D) est le symétrique de O par rapport à L.
3/ On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AI}$ et on pose $f = t \circ S$.
Déterminer l'image du carré ABCD par f.
Justifier que f est une similitude directe dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice n°2 :

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI).

1/ Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I.

a/ Montrer que Ω est le centre de R.
b/ Soit C = R(B). Montrer que I est le milieu du segment [AC].
2/ A tout point M de [AB] distinct de A et B, on associe le point M' de [IC] tel que $AM = IM'$.
Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.
3/ Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G.
a/ Préciser le rapport et l'angle de S.
b/ Montrer que S(B) = I et construire le point A' = S(A).
c/ Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

Exercice n°3 :

Dans un plan orienté, on donne un rectangle direct AEFD tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$,

$AE = 2\sqrt{2}$ et AD = 2. On désigne par B et C les milieux respectifs de [AE] et [FD].
Soit S la similitude plane directe qui envoie A sur C et E sur B.
1/ a/ Déterminer le rapport k et un angle α de S.
b/ Montrer que S (F) = E et déduire S (D).
2/ Soit Ω le centre de S et soit h la transformation définie par h = S o S.
a/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h.
b/ Trouver h (D) et h (F) et construire le point Ω.
3/ On désigne par I le milieu de [BE].
a/ Démontrer que Ω, C et I sont alignés.

b/ Exprimer $\overrightarrow{\Omega C}$ en fonction de $\overrightarrow{\Omega I}$.

4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $\left(A; \vec{u}, \vec{v}\right)$ avec $z_B = \sqrt{2}$ et $z_D = 2i$.

a/ Trouver la forme complexe de S.
b/ Déterminer l'affixe de Ω.

Exercice n°4 :

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ les points A, B et C

d'affixes : $z_A = 3 - i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = i$
Démontrer qu'il existe une similitude directe S et une seule transformant A en B et O en C.
Donner les éléments caractéristiques de S.

Exercice n°5 :

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que $AB = 2$, $AC = 1 + \sqrt{5}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1/ Soit la similitude directe S transforme B en A et A en C.
Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2/ On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω .

3/ On note D l'image de C par la similitude S.
a/ Démontrer que les points A, Ω et D sont alignés ainsi que les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Construire le point D.
b/ Montrer que $CD = 3 + \sqrt{5}$.

4/ Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).
a/ Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.
b/ Quelle est la nature du quadrilatère BFDE.

Exercice n°6 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On pose O = B*C et I = A*E où E est le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

1/ Montrer que le quadrilatère OACE est un losange.

2/ Soit S la similitude directe tel que S(A) = O et S(E) = B.
a/ Déterminer le rapport de S.
b/ Soit Ω le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).
Montrer que Ω est le centre de S.

3/ Soit J = O*B, montrer que les droites (ΩI) et (ΩJ) sont perpendiculaires.

4/ Soit f la similitude indirecte tel que f(E) = Ω et f(C) = O.
a/ Déterminer les images points A et C par $foS_{(OB)}$.
b/ En déduire que $foS_{(OB)}$ est une homothétie.
c/ Caractériser alors f.

Exercice n°7 :

On considère dans le plan orienté, un triangle ABC équilatéral de sens direct. On désigne par I et J Les milieux respectifs de [AB] et [AC] et par D le symétrique de A par rapport à C.

1/ Soit f l'antidéplacement du plan tel que f (C) = A et f(A) = B.
Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

2/ Soit g la similitude directe telle que g(B) = D et g(I) = C.
Montrer que g(A) = A et déterminer les éléments caractéristiques de g.

3/ Soit Ω le point définie par $\overrightarrow{\Omega A} + 2\overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$
a/ Justifier que fog est une similitude indirecte.
b/ Déterminer fog(I) et fog(A).
c/ Vérifier que $\overrightarrow{\Omega B} + 2\overrightarrow{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire que fog(Ω) = Ω .

4/ a/ Déterminer le rapport de la similitude fog.
b/ Montrer que l'axe de la similitude fog est perpendiculaire en Ω à la droite (AB).

Exercice n°8 :

Le plan est orienté dans le sens direct.

OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que $OA = OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de du segment [AB] et C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.

1/ Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2/ a/ Montrer que A est l'orthocentre du triangle ACD.

b/ Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de f.

3/ Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.
a/ Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire g(O).
b/ Déterminer les images de C et D par $g \circ f^{-1}$. En déduire la nature de $g \circ f^{-1}$.

4/ Soit I' = f(I) et J' = g(J).
a/ Déterminer les images des points J et I' par $g \circ f^{-1}$

b/ Montrer que les droites (IJ), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercices n°9 :

ABCD est un rectangle est un rectangle de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Le point E désigne le symétrique du point A par rapport à D.

Soit S la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1/ a/ Justifier que S(A) = B.
b/ Montrer que le triangle ACE est équilatéral et en déduire que S(E) = O.

2/ Soit I un point du segment [EO], distinct des points E et O et soit (Γ) le cercle de centre I et passant par A.
Les droites (AD) et (AB) recoupent le cercle (Γ) respectivement en M et P.
a/ Tracer (Γ) et placer les points M et P.
b/ Justifier que le point C appartient à (Γ).

3/ Soit N le projeté orthogonal du point C sur la droite (MP).
a/ Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.
b/ En déduire que S(M) = N.

4/ Montrer que les points B, D et N sont alignés.

Exercice n°10 :

Dans le plan orienté dans le sens direct, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB] , [BC], [AC] et [CJ].

1/ Faire une figure.

2/ Soit f la similitude directe de centre J qui envoie A sur K.
a/ Déterminer l'angle est le rapport de f.
b/ Justifier que f(K) = L.
c/ Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que f(I) = H

3/ On munit le pan d'un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$
a/ Montrer φ que est une similitude indirecte de centre C.
b/ Donner les affixes des points I, K, J et H.
c/ Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$
d/ Déduire alors que $\varphi = f \circ S_{(IK)}$, (où f est la similitude définie dans 2) et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4/ Soit Δ l'axe de la similitude φ.

a/ Tracer Δ.
b/ La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.
Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.