## Exercice n°1 :

On considère les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0\ ;\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + V_n}{3} \\ V_0 = 1\ ;\ V_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2V_n}{5} \end{cases}$

1/ Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \le V_n$.

2/ Montrer que la suite$(U_n)$ est croissante et que la suite $(V_n)$ est décroissante.

3/ Montrer que les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

4/ Soit la suite $(W_n)$ définie sur IN par $W_n = 9U_n + 5V_n$



a/ Montrer que $(W_n)$ est une suite constante.

b/ En déduire la limite commune des suites$(U_n)$ et $(V_n)$.

## Exercice n°2 :

On considère la suite $(U_n)$ définie pour tout entier $n \ge 1$, par : $U_n = \dfrac{1}{n^2}$, et on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}$$

1/ Calculer $S_1$, $S_2$ et $S_3$

2/ Démontrer que la suite $(S_n)$ est croissante

A/ Convergence de $(S_n)$ – méthode 1

On considère la suite $(V_n)$ définie pour tout entier $n \ge 1$, par : $V_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$, et on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

1/ a/ Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \ge 1$, on a : $T_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$

b/ En déduire que la suite $(T_n)$ est une suite majorée.

2/ Démontrer que pour tout entier $n \ge 1$, on a $U_n \le V_n$.

3/ Démontrer que la suite $(S_n)$ converge vers un nombre réel l.

B/ Convergence de $(S_n)$ – méthode 2

On considère la suite $(W_n)$ définie pour tout entier $n \ge 1$, par : $W_n = S_n + \dfrac{1}{n}$

1/ Montrer que les suites $(S_n)$ et $(W_n)$ sont adjacentes.

2/ En déduire que la suite $(S_n)$ converge vers un nombre réel l.

## Exercice n°3 :

Soient a et b deux réels tel que 0 < a < b, on définie les suites U et V par :

$U_0 = a$, $V_0 = b$ et $n \in$ IN : $U_{n+1} = \dfrac{2\ U_n.V_n}{U_n + V_n}$ et $V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$

1/ Montrer que pour tout $n \in$ IN : $0 < U_n < V_n$

2/ a/ Montrer que pour tout $n \in$ IN : $0 < V_{n+1} - U_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(V_n - U_n)$

b/ En déduire que $n \in$ IN : $0 < V_n - U_n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (b-a)$

3/ Montrer que U et V sont adjacentes et déterminer leur limite.