Exercice n°1 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 3 \ , \ n \geq 0 \end{cases}$

1. Etudier la monotonie de la suite (U_n).

2. a. Montrer que pour tout $n \in IN$; $U_n \geq n^2$

http://ymaths.e-monsite.com/

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$.

Exercice n°2 :

U et V sont les suites définies pour tout $n \in IN^*$ par :

$$U_n = \frac{1}{1+\sqrt{n}} + \frac{2}{1+\sqrt{2n}} + \frac{3}{1+\sqrt{3n}} + \cdots\cdots + \frac{n}{1+n} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{1+n^2} + \frac{2}{2+n^2} + \frac{3}{3+n^2} + \cdots\cdots + \frac{n}{n+n^2}$$

1. a. Montrer que pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leq k \leq n$ on a $\frac{1}{1+\sqrt{kn}} \geq \frac{1}{1+n}$

   b. En déduire que $U_n \geq \frac{n}{2}$ et déterminer la limite de (U_n).

2. a. Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $\frac{1}{2} \leq V_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$

   b. En déduire que la suite (V_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice n°3 :

Soit la suite réelle U définie sur IN par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$, $n \in IN$

1/ Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < U_n < 2$

2/ a/ Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} - U_n = \frac{(2-U_n)(1+U_n)}{\sqrt{U_n+2} + U_n}$

   b/ En déduire que la suite U est croissante.
   c/ En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

3/ a/ Vérifier que pour tout $n \in IN$: $\frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}} \leq \frac{1}{2}$ puis montrer que pour tout

   $n \in IN$: $0 < 2 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(2 - U_n)$

   b/ En déduire que pour tout $n \in IN$: $0 < 2 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   c/ Retrouver la limite de U_n.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1/ Dresser le tableau de variations de f.
2/ Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$; $n \in IN$
   a/ Montrer que pour tout $n \in IN$: $0 < U_n \leq 1$.
   b/ Etudier la monotonie de la suite, en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3/ a/ Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n^2}$ est arithmétique.

   b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c/ Retrouver alors la limite de U_n en $+\infty$.

Exercice n°5 :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{3+U_n^2}}$

1. a. Montrer que pour tout $n \in IN : 0 < U_n \le 1$.

http://ymaths.e-monsite.com/

b. Montrer que la suite U est décroissante.

c. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

2. Soit (V_n) la suite définie sur IN par : $V_n = \dfrac{U_n^2}{2+U_n^2}$

a. Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1er terme.

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c. Retrouver la limite de U_n.

3. a. Montrer que pour tout $n \in IN$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k^2} = \frac{1}{4}[3^{n+2} - 2n - 5]$.

b. En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=3}^{7} \frac{1}{U_k^2}$.

Exercice n°6 :

Soit (U_n) la suite définie sur IN par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2+4}{U_n+1}$

1/ a/ Montrer que pour tout $n \in IN$, $0 < U_n < 4$

b/ Etudier la monotonie de la suite U.

c/ Montrer que la suite est convergente et calculer sa limite.

2/ Soit f la fonction définie sur $IR \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x+1}$

a/ Montrer que pour tout $x \in [3, 4]$: $|f'(x)| \le \dfrac{4}{5}$

b/ En déduire que pour tout $n \in IN$: $|U_{n+1} - 4| \le \dfrac{4}{5}|U_n - 4|$

c/ Retrouver alors la limite de U.

3/ Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$; $n \in IN^*$

a/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $4n - S_n \le 4\left[1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]$

b/ En déduire la limite de $\dfrac{S_n}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°7 :

Soit $n \in IN^* \setminus \{1\}$ et $f_n : x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - x^n$ avec $x \in [0,1]$.

1. Montrer que si $0 \le a < b \le 1$ alors $f_n(a) > f_n(b)$
2. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]0,1[$ une solution unique U_n.
3. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$: $f_{n+1}(x) > f_n(x)$
4. En déduire que la suite U est croissante.
5. Montrer que la suite U converge vers $\ell > \dfrac{3}{4}$.